חוברת מתמטיקה

לתלמידי כיתות ט'

הקבצה א'

שם התלמיד : ______________________

שם התלמיד:

דף עבודה - ט'1

(1) **פרקו לגורמים, רשמו את תחום ההצבה ופתרו את המשוואות.**

א. $\frac{x+1}{9x}\cdot\frac{45}{18x+18}=\frac{5}{9}$

ב. $\frac{x+2}{4-2x}\cdot\frac{20-10x}{5x+10}=1$

ג. $\frac{7(x-2)}{14+7x}\cdot\frac{4-x^2}{12-6x}=0$

ד. $\frac{x-3}{5x}\cdot\frac{x+x^2}{2x^2-6x}=\frac{1}{5}$

ה. $\frac{x^2+7x}{3x^2}\cdot\frac{12x^2+9x}{x+7}=0$

ו. $\frac{x^2+10x+25}{2x^2+12x+18}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-25}=0$

(2) בדקו את הבוחן, קבעו באילו שלבים יש שגיאות, תקנו אותם ופתרו.
הציבו את הפתרון במשוואה המקורית ובדקו אותו.

בוחן

פתרו את המשוואות.

א. $\frac{2}{a}+\frac{a-7}{a^2}=-\frac{7}{a^2}$

תחום הצבה: $a\neq 0$

$\frac{2}{a}+\frac{a-7}{a^2}=-\frac{7}{a^2}\quad /\cdot a^2$

$2a+a-7=-7$

$3a-7=-7\quad /+7$

$3a=0$

$a=0$

ג. $\frac{2}{a-2}+\frac{4}{5a-10}=\frac{1}{5}$

תחום הצבה: $a\neq 2$

$\frac{2}{a-2}+\frac{4}{5a-10}=\frac{1}{5}$

$\frac{2\cdot 5+4}{5a-10}=\frac{1}{5}$

$\frac{\cancel{14}^{\,7}}{5a-\cancel{10}_{5}}=\frac{1}{5}$

$\frac{7}{5a-5}=\frac{1}{5}\quad /\cdot 5(a-1)$

$7=a-1\quad /+1$

$a=8$

ב. $\frac{a-1}{a+1}-\frac{1-a}{a^2+a}=\frac{a}{a+1}$

תחום הצבה: $a\neq 0\ ,\ a\neq -1$

$\frac{a-1}{a+1}-\frac{1-a}{a^2+a}=\frac{a}{a+1}\quad /\cdot a(a+1)$

$a(a-1)-1-a=a^2$

$a^2-a-1-a=a^2\quad /-a^2$

$2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

ד. $\frac{20}{a^2-4}+\frac{1}{a+2}=\frac{5}{a-2}$

תחום הצבה: $a\neq -2\ ,\ a\neq 2$

$\frac{20}{a^2-4}+\frac{1}{a+2}=\frac{5}{a-2}\quad /\cdot(a-2)(a+2)$

$20+a-2=5(a+2)$

$18+a=5a+10\quad /-a-10$

$8=4a$

$a=2$

ב ה צ ל ח ה

דף עבודה שבועי מספר 5

1. נתונה המשוואה: $\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{x}{2x-2}=a$

א. הסבירו מדוע המשוואה $\frac{-x^2+x+2}{2(x^2-2x+1)}=a$ שקולה למשוואה הנתונה.

ב. הסבירו מדוע $x = 1$ לא יכול להיות פתרון של המשוואה $\frac{-x^2+x+2}{2(x^2-2x+1)}=a$

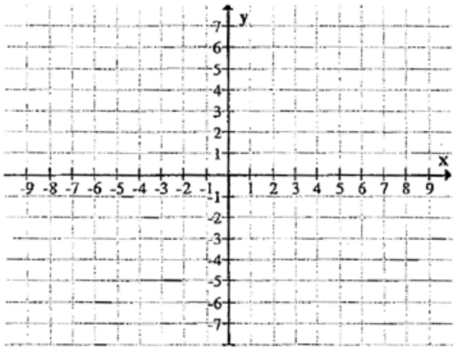
ג. פתרו את המשוואה עבור $a = 0$.

ד. הסבירו מדוע a לא יכול להיות -1

2. שרטטו במערכת הצירים את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$m(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-2} \quad , \quad g(x)=x-2 \quad , \quad f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$$

הסבירו את ההבדל בין שלושת הפונקציות.



3. פתרו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} xy=16 \\ x=3y+2 \end{cases}$$

4. EF , DE קטעי אמצעים במשולש ABC.

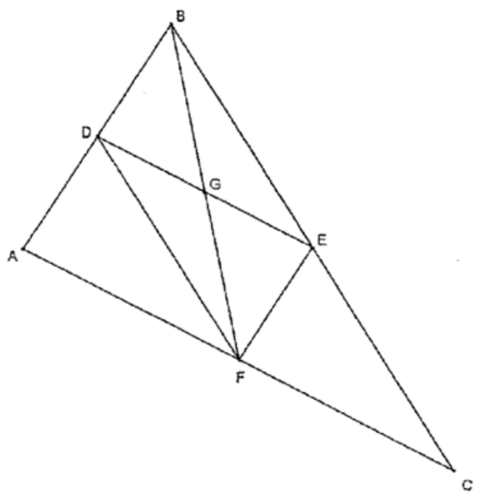
איזו טענה מהטענות הבאות נכונה **תמיד**? נמקו.

I. $EG = DG$

II. משולש BGE שווה שוקיים

III. $FD \perp AB$

IV. מרובע ADEF מלבן



5. בעיר מסויימת מצאו ש- 70% מהאנשים בעיר אוהבים מוסיקה קלסית והאחרים אינם אוהבים.

א. מה ההסתברות לפגוש בעיר אדם אחד שאוהב מוסיקה קלסית ואדם שני שאינו אוהב?

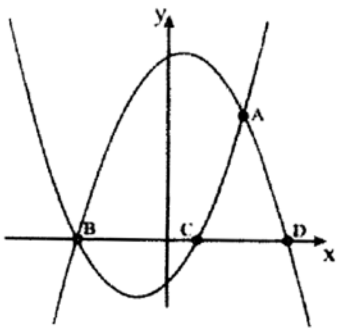
ב. מה ההסתברות לפגוש בעיר שני אנשים שאוהבים מוסיקה קלסית אם האדם הראשון שפגשו אוהב מוסיקה קלסית?

6. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f(x) = 3x^2 + 14x - 5$

שם התלמיד: ______

כא

1)



בשרטוט הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$g(x) = -x^2 + x + 12$

א. מִצאו את שיעורי הנקודות A , B, C.

ב. עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) > 0$?

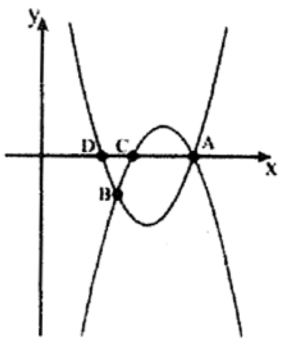
ג. עבור אילו ערכים של x מתקיים $g(x) > 0$?

ד. עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) < g(x)$?

ה. חַשבו את שטח המשולש ΔABD.

ו. חַשבו את שטח המשולש ΔABC.

2)



בשרטוט הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = x^2 - 7x + 10$

$g(x) = -x^2 + 8x - 15$

א. מִצאו את שיעורי הנקודות A, B, C, D.

ב. עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) > 0$?

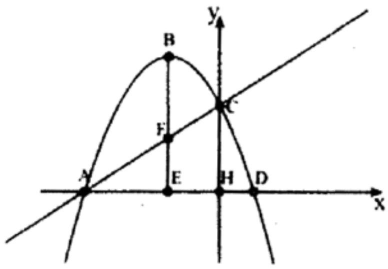
ג. עבור אילו ערכים של x מתקיים $g(x) > 0$?

ד. עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x) < g(x)$?

ה. חַשבו את שטח המשולש ΔABD.

ו. חַשבו את שטח המשולש ΔABC.

3)



נתון גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

א. חַשבו את שיעורי הנקודות A, B, C.

ב. חַשבו את שטח ΔACH. הַסבירו.

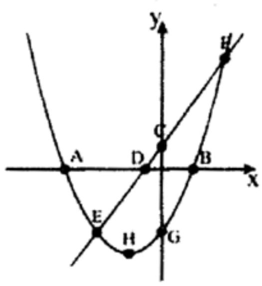
ג. רשמו את משוואת הישר AC.

ד. הישר BE מאונך לציר ה- x. מִצאו את שיעורי הנקודה F.

ה. חַשבו את שטח המרובע EFCH. הַסבירו.

ו. חַשבו את שטח ΔACD. הַסבירו.

4)



נתונים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

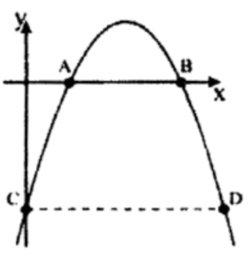
$g(x) = 4x + 2$

א. מִצאו את שיעורי הנקודות: A, B, C, D, E, F, G, H.

ב. חַשבו את שטח המשולש ΔABH. הַסבירו.

ג. עבור אילו ערכים של x מתקיים: $f(x) > g(x)$?

5)



בשרטוט גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.

א. מִצאו את שיעורי הנקודות A , B, C.

ב. מה משוואת הישר העובר דרך B ו- C?

ג. CD מקביל לציר x, וחותך את הפרבולה בנקודות C ו- D.
חַשבו שיעורי הנקודה D.

ד. מהו סוג המרובע ABDC? הַסבירו.

ה. חַשבו את שטח המרובע ABDC.

ו. חַשבו **בקירוב**, את היקף המרובע ABDC.

6 נתונים הגרפים של הפונקציות שקודקודיהן P ו- Q.

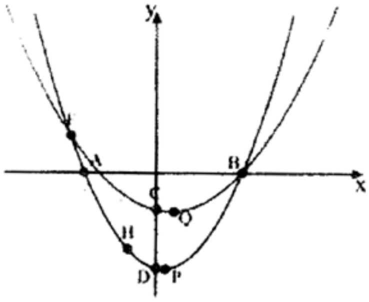
$f(x) = 2x^2 - x - 15$

$g(x) = x^2 - x - 6$

א. זהו את הגרף המתאים לכל אחת מהפונקציות.

ב. מִצאו את שיעורי הנקודות:
Q ,P ,F ,D ,C ,B ,A

ג. עבור אילו ערכים של x מתקיים: $f(x) < g(x)$?



7 בשִׂרטוט הגרפים של הפונקציות:

$g(x) = 4 - x^2 \quad , \quad f(x) = x^2 - 2x$

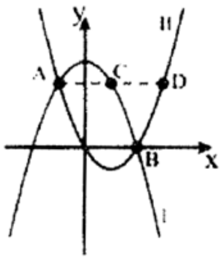
א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

ב. מְצאו את שיעורי הנקודות A ו- B.

ג. עבור אילו ערכים של x מתקיים: $f(x) < g(x)$?

ד. AD מקביל לציר x.
מְצאו את שיעורי הנקודות C ו- D.

ה. מְצאו אורך הקטע AD.



8 בשִׂרטוט הגרפים של הפונקציות:

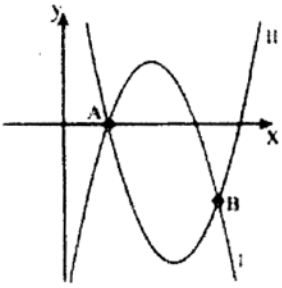
$g(x) = -x^2 + 8x - 12 \quad , \quad f(x) = x^2 - 10x + 16$

א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

ב. מְצאו את שיעורי הנקודות A ו- B.

ג. מְצאו את אורך הקטע AB (הדרכה: היעזרו במשולש ישר זווית).

ד. **באיזה תחום מתקיים** $f(x) > g(x)$?



9 בשִׂרטוט הגרפים של הפונקציות:

$g(x) = -3x + 15 \quad , \quad f(x) = -x^2 + 2x + 15$

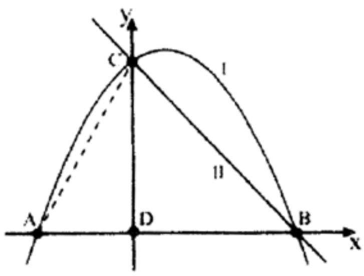
א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

ב. מְצאו את שיעורי הנקודות C ,B , A.

ג. חיברנו A עם C, והתקבל המשולש ΔABC. חַשבו את שטחו.

ד. חַשבו את אורכי הקטעים AC ו- CB (היעזרו במשפט פיתגורס).

ה. חַשבו **בקירוב**, את **היקף** המשולש ΔABC.



10 בשִׂרטוט הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad , \quad g(x) = -x + 3$

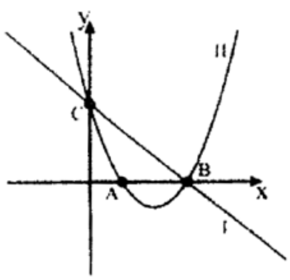
א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

ב. מְצאו את שיעורי הנקודות C ,B , A.

ג. חַשבו את שטח המשולש ΔABC.

ד. חַשבו את אורכי הקטעים AC ו- BC (היעזרו במשפט פיתגורס).

ה. חַשבו **בקירוב**, את היקף המשולש ΔABC.



מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

פונקציות

1. פשטו את הביטויים ומיינו לארבע קבוצות:

פונקציות קוויות, פונקציות ריבועיות, פונקציות מסוג אחר, לא פונקציות:

• $f(x) = x(x-5) - (x+2)(x-4)$
• $g(x) = (x-2)^2 + (2x-5)^2$
• $m(x) = \frac{3x-5}{7}$
• $m(x) = \frac{2x^2-5x+7}{x}$ $\quad x \neq 0$
• $x = 2$
• $t(x) = x(x-3)^2 - (x+5)^2$
• $\frac{3y+x}{2} = 4$
• $n(x) = \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{x+7}{4}$

- פונקציות קוויות
- פונקציות ריבועיות
- פונקציות מסוג אחר
- לא פונקציות

2. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

א. $y = 3x$ ב. $y = -x + 3$ ג. $y = 4 - 3x$ ד. $y = x^2 - 1$

ה. $y = x^2 - 2$ ו. $y = 4 - x^2$ ז. $y = (x-2)^2 + 1$ ח. $y = (x+5)(1-x)$

3. נתונות שתי פונקציות קוויות $f(x) = 0.5x - 4$

$g(x) = mx + b$

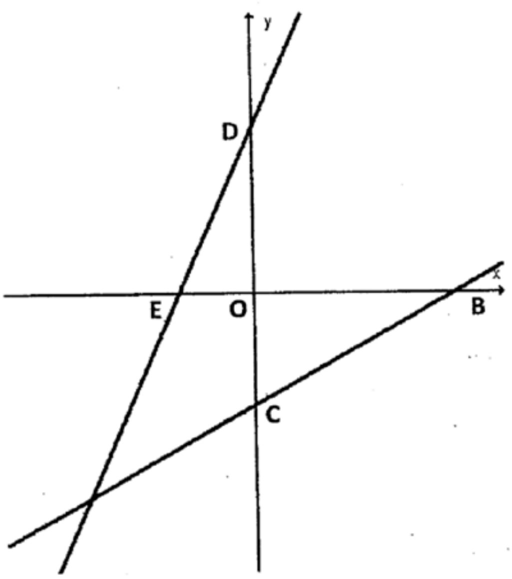
משורטטים הגרפים של שתי הפונקציות במערכת הצירים.

הישרים יוצרים משולש ישר זווית עם הצירים.

נתון: $\Delta OBC \sim \Delta ODE$, $\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ODE}} = \frac{16}{9}$

א. מצאו את הפרמטרים **m, b**

ב. חשבו את היקף המרובע **DECB**



מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

4. נתונה הפונקציה: $y = a(x-3)^2 + k$

הציבו במקום הפרמטרים a ו- k ערכים לפי התנאים הבאים: (יש יותר מאפשרות אחת)

א. לפונקציה נקודת מקסימום והיא חותכת את ציר x בשתי נקודות שונות

ב. לפונקציה נקודת מינימום והיא אינה חותכת את ציר x

ג. לפונקציה נקודת מינימום והיא חותכת את ציר y בנקודה $(0,-1)$

ד. לפונקציה נקודת מקסימום והיא משיקה לציר x בנקודה אחת.

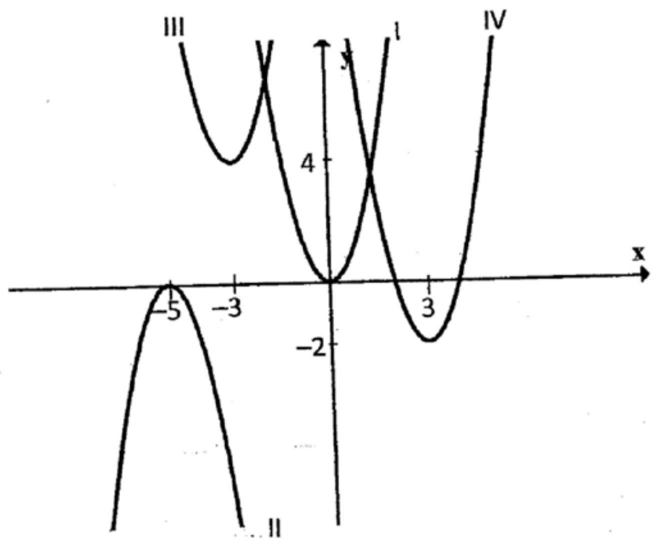
5. הפונקציה של פרבולה מספר I בשרטוט היא $y = 2x^2$

א. כתבו את ציר הסימטריה של הפרבולה המסומנת במספר II

ב. כתבו את שיעורי הקדקוד של הפרבולה המסומנת במספר III

ג. כתבו את הפונקציה הריבועית המתאימה לפרבולה המסומנת במספר IV

ד. חשבו את נקודות החיתוך עם הצירים של הפרבולה המסומנת במספר IV



6. נתונה הפרבולה $y = (2-x)(x+7)$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר x

ב. באיזה תחום הפונקציה חיובית?

ג. כתבו את משוואת הקו הישר העובר דרך קדקוד הפרבולה הנתונה ודרך נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר y.

7. א. לפרבולות: $y = x^2 - 3x$ ו- $y = -x^2 + 3x$ אותן נקודות חיתוך עם ציר x.

נכון / לא נכון (סמנו את התשובה הנכונה) ונמקו.

ב. לפרבולות: $y = 2x^2 - 10x + 12$ ו- $y = 2(x-5)^2 + 12$ אותה נקודת חיתוך עם ציר y.

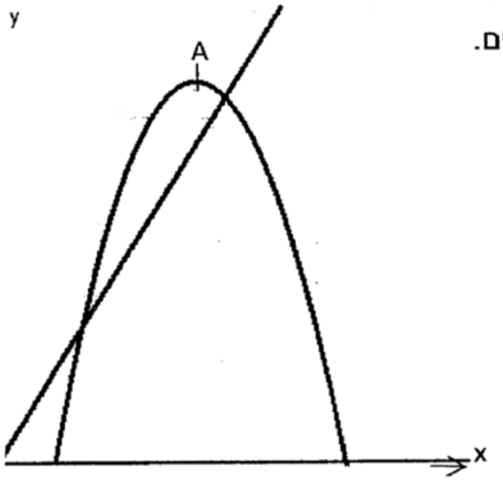
נכון / לא נכון (סמנו את התשובה הנכונה) ונמקו.

8. בשעה **08:00** יצא הולך רגל מכפר סבא צפונה במהירות קבועה מסויימת. שעתיים אחריו יצא רוכב אופניים באותה דרך. בשעה **11:00** נפגשו הולך הרגל ורוכב האופניים. המרחק של רוכב האופניים מכפר סבא **(y)** מתואר ע"י הפונקציה:

$y = -x^2 + 14x - 24$ כאשר **x** – מייצג את הזמן שחלף מהשעה **8:00**

רוכב האופניים נסע עד לנקודה **A** ואז הסתובב וחזר לכפר סבא.

הגרף מתאר את תנועת הולך הרגל ואת תנועת רוכב האופניים.



א. מצאו את המרחק עד הפגישה.

ב. מצאו את מהירות הולך הרגל.

ג. מצאו באיזו שעה נפגשו הולך הרגל ורוכב האופניים בפעם השנייה.

ד. באיזה מרחק מכפר סבא הסתובב רוכב האופניים?

ה. באיזו שעה הגיע רוכב האופניים לכפר סבא?

ו. באיזה מרחק מכפר סבא היה הולך הרגל בשעה שרוכב האופניים הגיע לכפר סבא?

9. גרף הפונקציה **h(x)** נוצר על ידי הזזת הפונקציה $f(x) = x^2$.

נקודות האפס של הפונקציה (נקודות חיתוך עם ציר ה- x) הן **(2,0)** ו **(8,0)** וקדקוד הפרבולה **h(x)** מונח על הישר $y = -9$.

א. מהם שיעורי הקדקוד של הפרבולה **h(x)**?

ב. רשמו את משוואת הפרבולה **h(x)** .

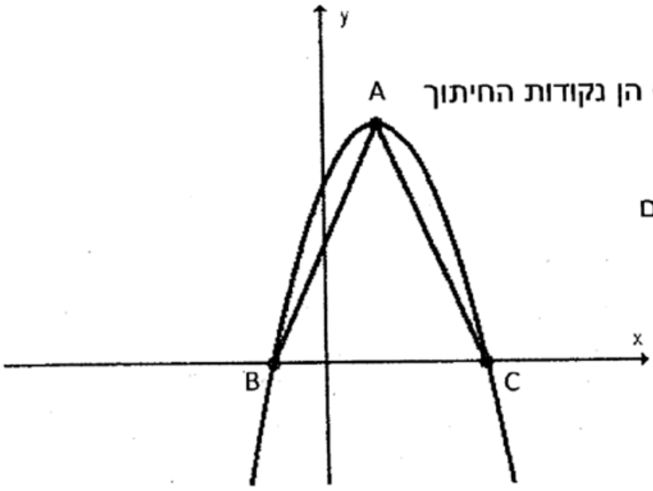
ג. שרטטו את גרף הפונקציה **h(x)**.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה **h(x)**.

ה. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה **h(x)**.

ו. בכמה יחידות יש להזיז את הפרבולה **h(x)** כלפי מעלה, כדי שתתקבל פרבולה שיש לה נקודת אפס אחת? מהם שיעורי נקודת האפס הזו?

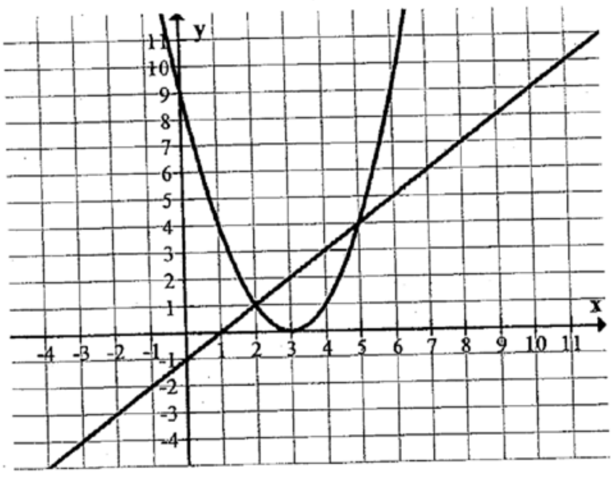
מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה



10. נתון גרף הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 3$,
הנקודה **A** היא נקודת הקדקוד, הנקודות **B**, **C** הן נקודות החיתוך עם ציר **x**.
א. כתבו את משוואות הקווים הישרים שעליהם מונחים הקטעים **AB ,AC**
ב. איזה סוג משולש הוא משולש **ABC**? נמקו.
ג. חשבו את שטח המשולש **ABC**.

11. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = ax^2 + bx + 5$
א. מה משותף לכל הפונקציות מהמשפחה?
ב. ידוע ש- $a > 0$ ו- $b < 0$. איזו טענה מהטענות הבאות אינה נכונה בהכרח:
i. ציר הסימטריה של גרף הפונקציה עובר ברביעים הראשון והרביעי
ii. לגרף הפונקציה יש שתי נקודות חיתוך עם ציר **x**
iii. קיימת נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שערך ה- y שלה הוא **5**
iv. לפונקציה נקודת מינימום
ג. נתונות שתי פונקציות מהמשפחה $f(x) = ax^2 + bx + 5$. באחת $a > 0$ ו- $b < 0$ ובשנייה $a < 0$ ו- $b > 0$, כמו כן ידוע שהערכים של **a** ושל **b** נגדיים זה לזה.
מה משותף לשתי הפונקציות ומה שונה ביניהן?

12. נתונות הפונקציות $f(x) = (x - 3)^2$ ו- $g(x) = x - 1$
לפניכם שרטוט הגרפים של הפונקציות:



א. רשמו את התחום שבו $f(x) < g(x)$
ב. שרטטו (בקו מקווקו) על אותה מערכת צירים גרף של הפונקציה $m(x) = (x - 3)^2 - 4$
ג. מצאו עבור אילו ערכים של x
$m(x) = g(x)$ (הציגו פתרון אלגברי)

13. נתונות הפונקציות $y = a(x-2)^2 - 3$, $y = mx + 5$.

א. מה צריך להיות הערך של **m** אם נתון שהגרף של הפונקציה הקווית עובר דרך הקדקוד של הפונקציה הריבועית?

ב. מה צריך להיות הערך של **a** אם נתון שהגרף של הפונקציה הריבועית עובר דרך נקודת החיתוך עם ציר ה- **y** של הפונקציה הקווית?

14. א. נתונה משפחה של פונקציות קוויות מהצורה $y = 2x + b$

בטאו את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר **x** באמצעות הפרמטר **b**.

ב. נתונה משפחה של פונקציות קוויות מהצורה $y = mx + 3$, $m \neq 0$

בטאו את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר **x** באמצעות הפרמטר **m**.

15. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

א. מצאו את שיעור ה- **x** של קדקוד הפרבולה.

היעזרו בשיעורי הקדקוד של הפרבולה שמצאתם כדי לענות על סעיפים ב' ג'

ב. נתון כי $f(-1) = 10$, מצאו את $f(3)$ מבלי להציב בפונקציה.

ג. $f(5) = 46$. נתון כי $f(x) = 46$ מצאו את **x** אם $x \neq 5$

ד. נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר **x** נמצאות:

i. בחלק החיובי של ציר **x**

ii. נקודה אחת בראשית הצירים והשנייה בחלק החיובי של הציר

iii. נקודת אחת בחלק החיובי של ציר **x** ונקודה אחת בחלק השלילי של הציר

iv. בחלק השלילי של ציר **x**

נמקו.

16. בפונקציה ריבועית $t(x)$ נתון: $t(0) = t(-5) = 2$

א. מה שיעור ה- **x** של קדקוד הפרבולה?

ב. איזו מבין הפונקציות הבאות מתאימה לנתונים הנ"ל?

i. $t(x) = x^2 - 5x + 2$

ii. $t(x) = 2x^2 + 10x + 2$

iii. $t(x) = x^2 + 5x + 1$

iv. $t(x) = -2x^2 - 10x - 2$

17. נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2 - 5$ ו- $g(x) = 2x^2 - 3x$ ענו על הסעיפים הבאים ונמקו כל סעיף

א. האם לגרף פונקציה $m(x) = (x-3)^2 + 5$ יש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $f(x)$?

ב. האם לגרף הפונקציה $t(x) = 2x^2 + 3x$ יש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $g(x)$?

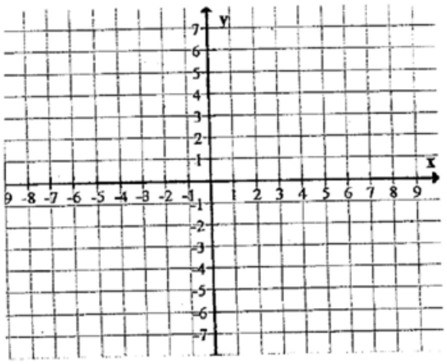
ג. האם לגרף הפונקציה $p(x) = -(x-3)^2 - 5$ יש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $f(x)$?

ד. חשבו את ערכי x עבורם $f(x) = g(x)$.

18. שרטטו במערכת הצירים את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \quad , \quad g(x) = x-2 \quad , \quad m(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$$

הסבירו את ההבדל בין שלושת הפונקציות.



19. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה

$f(x) = 3x^2 + 14x - 5$

20. א. השלימו מספרים כך שתתקבל פונקציה ריבועית שבה שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה יהיה $x = 3$: $f(x) = (x + \_\_\_)(x - \_\_\_)$

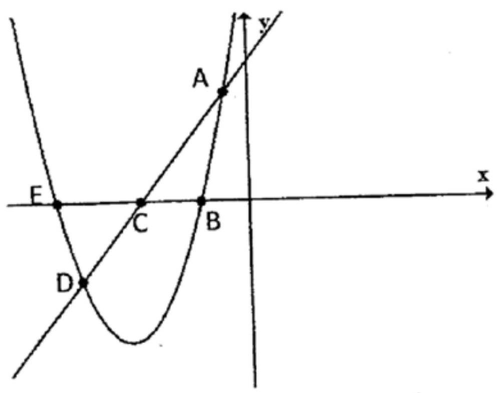
ב. חשבו את שיעור ה- y של נקודת הקדקוד בהתאם למספרים שהשלמתם.

21. נתונה הפונקציה: $g(x) = (x-5)^2 + 4$

א. השלימו: $g(3) = g(\square)$ ב. הסבירו את השיקולים בבחירת המספר שהשלמתם.

22. נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 + 10x + 16$

$g(x) = 2x + 9$. הגרפים של הפונקציות משורטטים.



א. שרטטו משולש ABC וחשבו את שטחו.

ב. שרטטו משולש DEC וחשבו את שטחו.

ג. חשבו את שטח המרובע ABDE

ד. מצאו את משוואת הקו הישר העובר דרך הנקודות D ו- B.

ד. מצאו את התחום המשותף בו $f(x) < 0$ וגם $g(x) < 0$

23. **P** ו- **M** הן שתי נקודות סימטריות על פרבולה, שציר הסימטריה שלה הוא $x = 3$
וכן $M(-1,5)$. מצאו את שיעורי הנקודה **P**. הסבירו באמצעות תרשים.

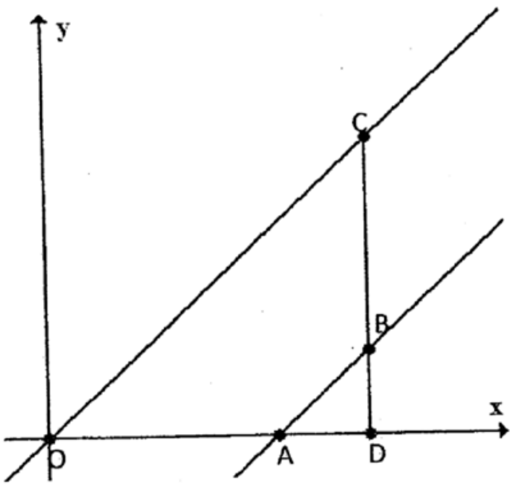
24. נתונה הפונקציה $f(x) = 2(x-5)^2 - 4$
נתונות טענות המתייחסות לפונקציה. סמנו נכון /לא נכון ונמקו (אין צורך לחשב):

טענה	נכון / לא נכון	נימוק
לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x		
נתונה פונקציה נוספת g. $g(x) = -x(x-10)$ לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ אותו ציר סימטרייה		
לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ אותה נקודת קדקוד		
נתונה הפונקציה $m(x) = 2x^2 - x - 1$. הפונקציות $f(x)$ ו- $m(x)$ "מתלכדות".		
לכל x , ההפרש בין הפונקציה $f(x)$ לפונקציה $t(x) = f(x) + 4$ הוא 4.		

25. חשבו את ציר הסימטריה של הפונקציות הריבועיות הבאות:

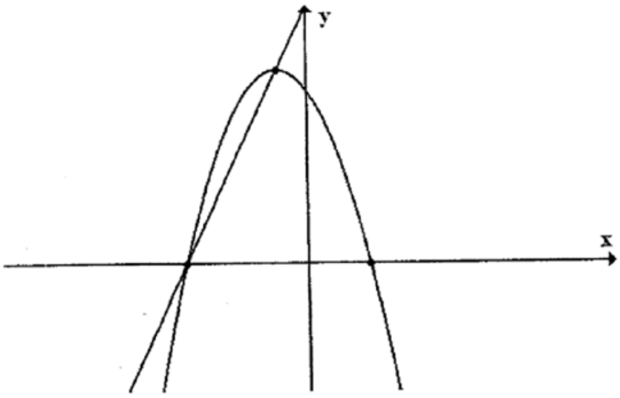
א. $f(x) = (x-4)(x+2)$
ב. $g(x) = 3(x+5)(x-2)$
ג. $m(x) = (x-0.5)(x+2)$
ד. $t(x) = (x-a)(x-b)$

26. הצלעות של המרובע **ABCO** מונחות על: ציר ה- x, הישר $y = x$, הישר $y = x - 5$,
הישר $x = a$ $a > 5$.



א. איזה מרובע הוא **ABCO**? נמקו.
ב. הציעו ערך מתאים לפרמטר **a** וציינו את שיעורי הקדקודים: **A**, **B**, **C**, **D**
על פי ערך ה- **a** שקבעתם:
ג1. חשבו את שטח המשולש **ABD**
ג2. חשבו את שטח המשולש **ADC**
ג3. חשבו את שטח המרובע **ABCO**
ד. מצאו את הערך של **a** אם ידוע ששטח המרובע **ABCO** שווה **22.5** יחידות ריבועיות.
הציגו את דרך הפתרון.

27. נתונות הפונקציות: $f(x) = (2-x)(x+4)$.
$g(x) = 3x + 12$.
הנקודה **A** היא קדקוד הפרבולה.
הנקודות **B**, **C** הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם ציר **x**. הפרבולה והישר נחתכים בנקודות **A**, **B**.

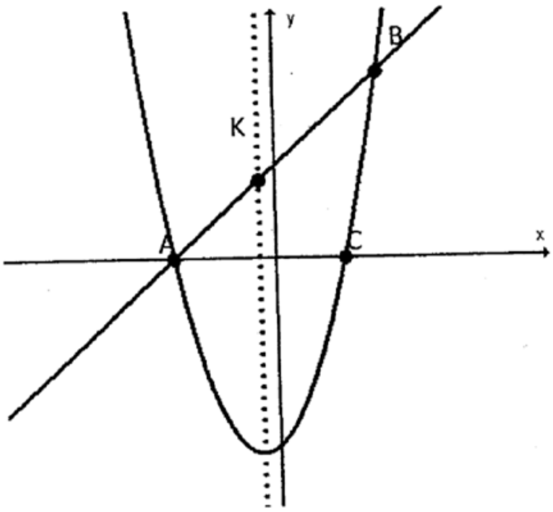


א. חשבו את שיעורי נקודה **A**, הציגו את דרך החישוב.
ב. שרטטו את הישר העובר דרך הנקודות **A** ו- **C** וכתבו את משוואתו,
ג. חשבו את שטח המשולש **ABC**, הציגו את דרך החישוב.
ד. היקף המשולש **ABC** הוא:
(סמנו את התשובה הנכונה)

i. $6+2\sqrt{90}$ ס"מ   ii. $6+\sqrt{180}$ ס"מ   iii. **15** ס"מ   iv. **27** ס"מ

נמקו:

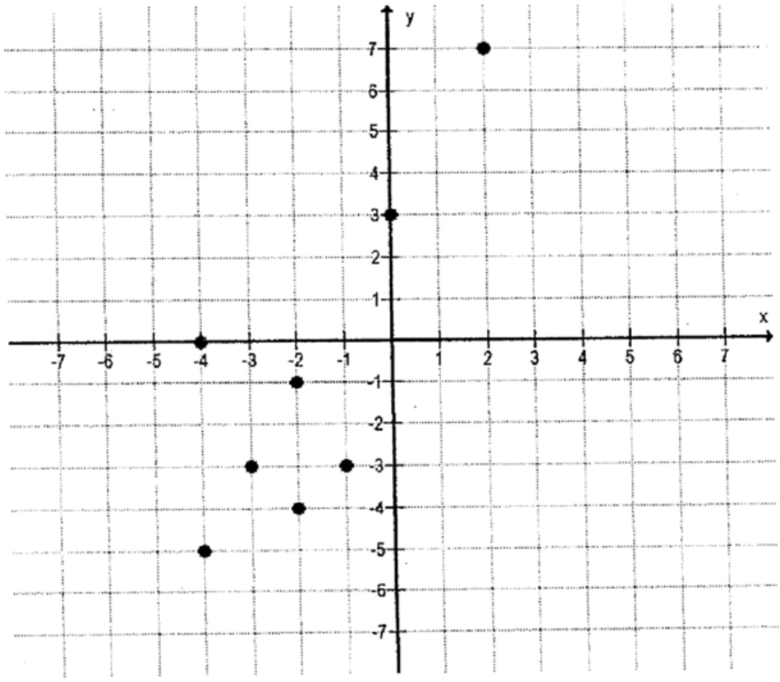
28. משורטטים הגרפים של הפונקציות
$f(x) = (x-2)(x+3)$
$g(x) = x + 3$



א. חשבו את שיעורי הנקודות: **A**, **B**, **C** , הציגו דרך חישוב.
ב. רשמו את התחום בו $f(x) < 0$
ג. רשמו את התחומים בהם $f(x) > g(x)$
ד. הנקודה **K** נמצאת על ציר הסימטריה של $f(x)$ ועל גרף הפונקציה $g(x)$.
חשבו את שיעוריה. הציגו דרך חישוב.
ה. כתבו ביטוי לפונקציה ריבועית שהקדקוד שלה הוא הנקודה **K** (קיימות אפשרויות שונות לתשובה).

29. נתונה מערכת צירים ובה מסומנות **8** נקודות.

4 נקודות המתאימות לפונקציה קווית ו- **4** נקודות המתאימות לפונקציה ריבועית.



א. כתבו את שיעורי הנקודות המתאימות לפונקציה הקווית:

____________, ____________, ____________, ____________

ב. כתבו את משוואת הפונקציה הקווית. __________________

ג. כתבו שיעורי נקודה נוספת הנמצאת על גרף הפונקציה הקווית ברביע השני:

ד. כתבו את שיעורי הנקודות המתאימות לפונקציה הריבועית:

____________, ____________, ____________, ____________

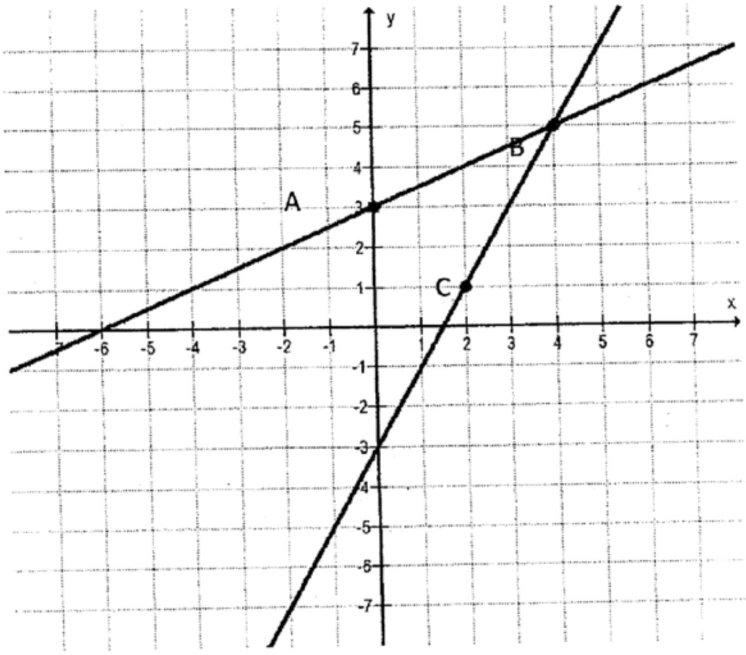
ה. כתבו את משוואת הפונקציה הריבועית. __________________

ו. כתבו שיעורי נקודה נוספת הנמצאת על גרף הפונקציה הריבועית ברביע הראשון:

ז. חשבו את שיעורי נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.

מדינת ישראל
משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית – אגף מדעים
הפיקוח על הוראת המתמטיקה

30. לפניכם מערכת צירים ועליה שני גרפים של שתי פונקציות קוויות.



הנקודות **A, C** מונחות על הגרפים. הנקודה **B** היא נקודת החיתוך של הגרפים.

א. הסבירו מדוע **BC = AB**

ב. כתבו את משוואות הפונקציות הקוויות: ______________ , ______________

ג. סמנו נקודה **D** כך שיתקבל מעוין **ABCD**. כתבו את שיעורי הנקודה **D**.

ד. כתבו את משוואות הפונקציות הקוויות עליהן מונחים הקטעים **AD, CD**.

______________________ , ______________________

ה. העבירו את האלכסונים **AC, BD** והראו שמכפלת השיפועים של הישרים עליהם מונחים האלכסונים שווה **1–**.

31. נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2 - 9$.

א. הנקודה **(6,7)** נמצאת על גרף הפונקציה.

מהי הנקודה הסימטרית לה ביחס לציר הסימטריה של הפרבולה? נמקו.

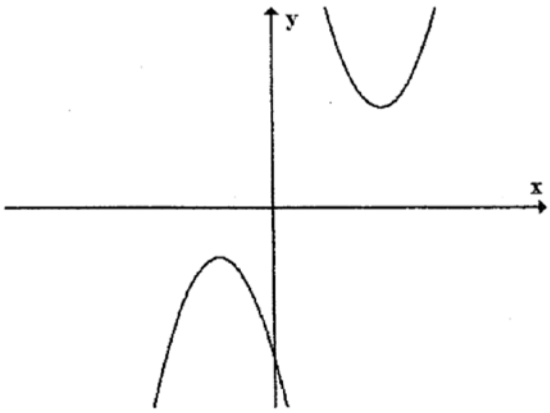
ב. מהו התחום שבו הפונקציה חיובית?

ג. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ובנקודת הקדקוד. הציגו את דרך החישוב. אפשר להיעזר בסקיצה של גרף הפונקציה.

ד. רשמו דוגמה לערך של הפרמטר **m** כך שתתקבל פונקציה ריבועית שאין לה נקודות חיתוך עם ציר x. נמקו. $y = -(x-2)^2 + m$. $m =$ _____.

נימוק:

32. לפניכם גרפים של שתי פרבולות.



א. איזה זוג מבין זוגות הפונקציות הבאות יכול להיות הזוג שהפרבולות הנ"ל הן הגרפים שלו?
נמקו את בחירתכם.

i. $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -x^2 - 3x$

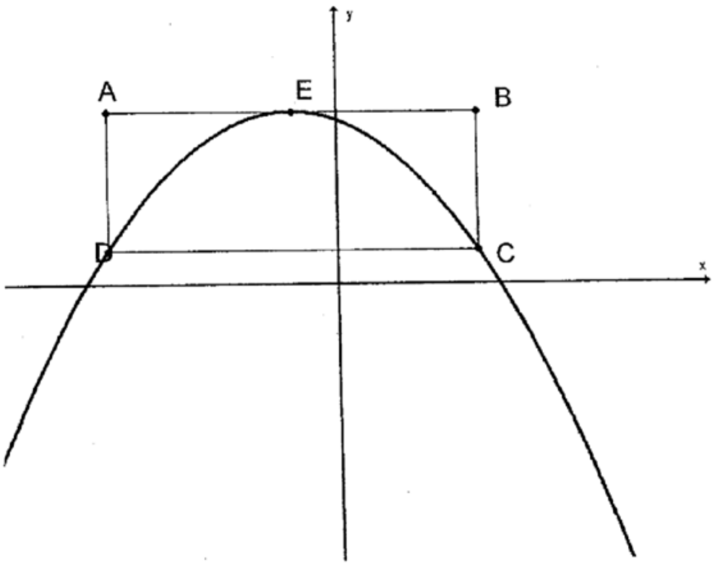
ii. $y = -(x+2)^2 - 2$, $y = x^2 + 3$

iii. $y = (x-4)^2 + 4$, $y = -x^2 - 2$

iv. $y = -(x+2)^2 - 2$, $y = (x-4)^2 + 4$

ב. חברו בקו בין נקודות הקדקוד של הפרבולות וכתבו את משוואת הישר שמתקבל.
הציגו את דרך הפתרון.

ג. היעזרו במשפט פיתגורס וחשבו את אורך הקטע שבין שני הקדקודים של הפרבולות,
הציגו את דרך החישוב.



33. נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 5$.

נתון מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים.
שיעורי הקדקוד **A** של המלבן הם **(‎–5,5)**.
E קדקוד הפרבולה. הנקודה **E** נמצאת באמצע הצלע **AB** של המלבן.
הפרבולה עוברת דרך הקודקודים **C**, **D** של המלבן.

א. חשבו את שיעורי הנקודות **B**, **C**, **D** של המלבן. נמקו.

ב. מצאו את משוואת הישר העובר דרך קדקוד הפרבולה **E** לקדקוד **D** של המלבן.

ג. חשבו את היקפו של משולש **EDC**.

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + m$.

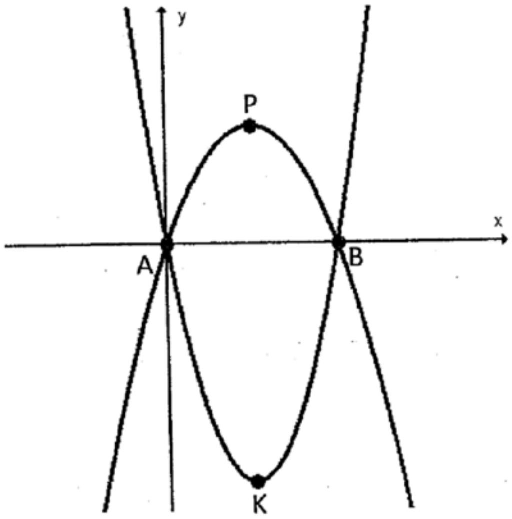
רשמו דוגמה לערך של הפרמטר m כך שתתקבל פונקציה ריבועית שאין לה נקודות חיתוך עם המלבן. נמקו. **m = ____**.

34. משורטטים הגרפים של הפונקציות

$f(x) = 2(x-2)^2 - 8$

$g(x) = -x^2 + 4x$

הנקודות **P, K** הן הקדקודים של הפרבולות.



א. חשבו את שיעורי הנקודות: **A, B**, הציגו דרך חישוב.

ב. חשבו את המרחק בין **P** ל- **K**. הציגו דרך חישוב.

ג. כתבו את משוואת הפונקציה הקווית העוברת דרך **A** ו- **P**.

הציגו דרך פתרון.

ד. לפניכם מספר טענות. ענו "נכון" / "לא נכון" לכל אחת מהטענות:

טענה	**נכון**	**לא נכון**
$f(-2) = 8$		
המרובע שקדקודיו הם הנקודות **A, P, B, K** הוא דלתון		
קיים תחום בו **$f(x) > g(x)$**		
קיימת פונקציה קווית קבועה שאינה חותכת אף אחד מהגרפים		

ה. השלימו:

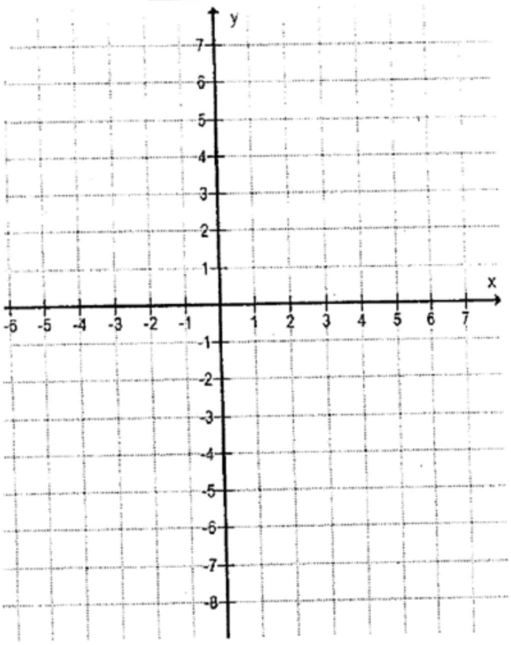
i. **$m(x) = 2(x-2)^2 + 6$** היא הזזה אנכית של **$f(x)$** ב- _______ יחידות.

ii. **$t(x) = -(x-6)^2 + 4$** היא הזזה אופקית של **$g(x)$** ב- _______ יחידות.

35. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

לפניכם מספר טענות. ענו "נכון" / "לא נכון" לכל אחת הטענות, הוסיפו נימוק מתאים לכל טענה. (ניתן להיעזר בסקיצה של גרף הפונקציה למטה)

טענה	**נכון**	**לא נכון**
נקודת החיתוך עם ציר y היא $(0,-4)$		
קדקוד הפונקציה נמצא ברביע השלישי		
לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר x		
לכל פונקציה מהמשפחה $y = -3x^2 + 4x + c$ אותו ציר סימטריה כמו לפונקציה f(x)		
הגרף של הפונקציה $g(x) = -x - 6$ חותך את הגרף של f(x) בשתי נקודות.		



36. נתונה "משפחה" של פונקציות ריבועיות מהצורה

$f(x) = x^2 + bx + c$.

לכל אחד מהמקרים הבאים תנו דוגמה לערכים המתאימים עבור b ו- c:

רשמו מהי נקודת הקיצון בכל סעיף.

א. נקודת הקיצון של הגרף היא $(0,0)$.

ב. נקודת הקיצון של הגרף היא על ציר ה- y.

ג. נקודת הקיצון של הגרף היא על ציר ה- x.

ד. נקודת הקיצון של הגרף היא על הישר $y = -3$.

ה. נקודת הקיצון של הגרף היא על הישר $x = 2$.

ו. נקודת הקיצון של הגרף היא על הישר $y = x$.

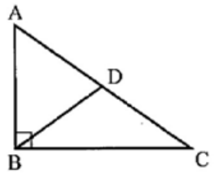
משולש ישר-זווית

משולש ישר-זווית הוא משולש שבו זווית אחת היא זווית ישרה ושתי הזוויות האחרות הן זוויות חדות שסכומן 90°. הצלע שמול הזווית הישרה נקראת יתר. שתי הצלעות האחרות נקראות ניצבים.

בפרק זה נציג כמה משפטים מיוחדים המתקיימים במשולש ישר-זווית.

התיכון ליתר במשולש ישר-זווית

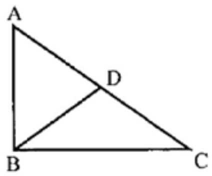
משפט: התיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר.



במילים אחרות, אם המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$) ו- BD הוא התיכון ליתר AC, אזי $BD=\frac{1}{2}AC$.

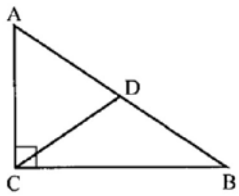
הערה: מכיוון ש- $BD=\frac{1}{2}AC$ וגם $AD=CD=\frac{1}{2}AC$, הרי $BD=AD=DC$ ולכן המשולש ABD הוא שווה-שוקיים ($BD=AD$) והמשולש BDC הוא שווה-שוקיים ($BD=DC$).

משפט: אם במשולש, התיכון לצלע שווה למחצית הצלע שאותה הוא חוצה, אזי המשולש הוא ישר-זווית (הזווית שמול הצלע הנחצית היא הזווית הישרה).



במילים אחרות, אם במשולש ABC הקטע BD הוא תיכון לצלע AC ונתון: $BD=\frac{1}{2}AC$, אזי המשולש ABC הוא ישר-זווית ומתקיים: $\sphericalangle ABC=90^\circ$.

תרגילים

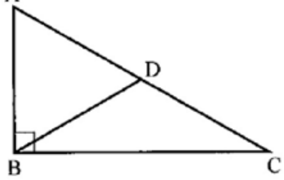


.1 המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AC \perp BC$).
CD הוא תיכון ליתר AB.
א. נתון: 10 ס"מ $=AB$. מהו אורך התיכון CD ?
ב. נתון: $\sphericalangle B=35^\circ$. מהו גודל הזווית DCB ?

תשובה: א. 5 ס"מ. ב. 35°.

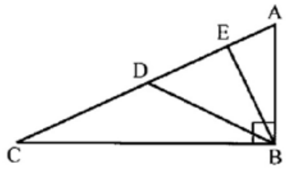
.2 המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\sphericalangle B=90^\circ$). BD הוא תיכון ליתר AC.
נתון: 27 ס"מ $=BD+AC$. מהו אורך התיכון BD ?

תשובה: 9 ס"מ.



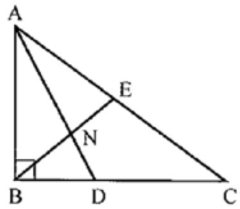
.3 המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
נתון: $\sphericalangle C=30^\circ$.
BD הוא התיכון ליתר AC.
הוכח: המשולש ABD הוא שווה-צלעות.

4. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AB \perp BC)$.
BD הוא התיכון ליתר ו- BE הוא
הגובה ליתר. נתון: $\sphericalangle ABE = 24^\circ$.
א. חשב את הזווית C.
ב. חשב את הזווית DBE.



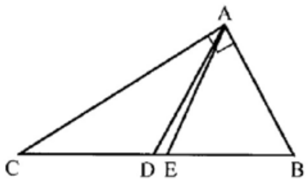
תשובה: א. 24°. ב. 42°.

5. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AB \perp BC)$.
נתון: $\sphericalangle C = 38^\circ$. BE הוא התיכון ל- AC,
ו- AD חוצה את הזווית BAC.
חשב את הזווית BND.



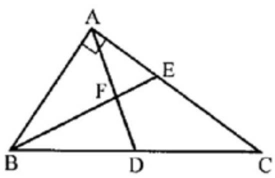
תשובה: 78°.

6. בציור שלפניך נתון: $\sphericalangle CAB = 90^\circ$,
$\sphericalangle B = 62^\circ$, $CD = DB$, $AE = AB$.
חשב את הזווית DAE.



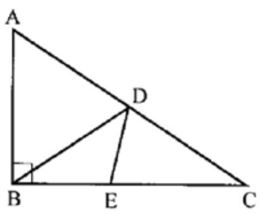
תשובה: 6°.

7. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle BAC = 90^\circ)$.
BE חוצה את הזווית ABC.
נתון: $BD = DC$, $\sphericalangle DAC = \alpha$.
א. הבע באמצעות α את הזווית BDA.
ב. הבע באמצעות α את הזווית BFD.



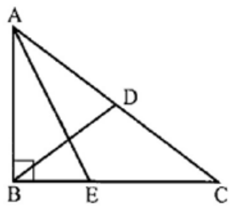
תשובה: א. 2α. ב. $135^\circ - 1\frac{1}{2}\alpha$.

8. BD הוא התיכון ליתר AC במשולש
ישר-זווית ABC $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.
הנקודה E נמצאת על הניצב BC
כך שמתקיים $DC = EC$. נתון: $\sphericalangle DBE = \alpha^\circ$.
א. הבע באמצעות α את הזווית BDE.
ב. נתון: $BE = DE$. חשב את α.

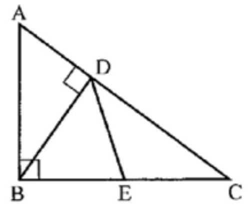


תשובה: א. $90^\circ - 1\frac{1}{2}\alpha$. ב. 36°.

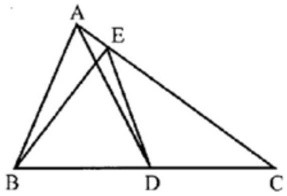
9. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.
BD הוא התיכון לצלע AC
ו- AE חוצה את הזווית BAC.
הוכח: $\sphericalangle BAE = \frac{1}{4}\sphericalangle BDC$.



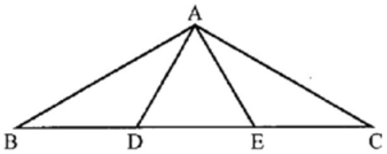
10. BD הוא הגובה ליתר AC במשולש ישר-זווית ABC ($\sphericalangle ABC = 90°$).
נתון: E אמצע הקטע BC.
הוכח: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle ABD$.



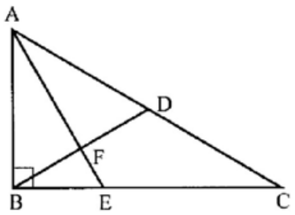
11. AD הוא התיכון לצלע BC ו- BE הוא הגובה לצלע AC במשולש ABC.
הוכח: $BD = DE$.



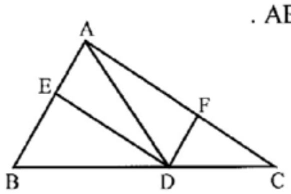
12. D ו- E הן נקודות על הצלע BC במשולש ABC. נתון: $BD = DE = EC$, $AB \perp AE$, $AD \perp AC$.
הוכח: המשולש ADE הוא שווה-צלעות.



13. BD הוא התיכון ליתר AC במשולש ישר-זווית ABC ($AB \perp BC$).
AE חוצה את הזווית BAC.
נתון: F – אמצע BD.
הוכח: המשולש ABD הוא שווה-צלעות.

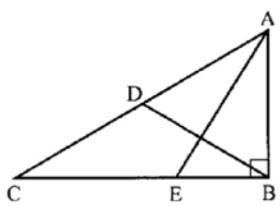


14. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC.
DE ו- DF הם חוצי זווית של הזוויות ADB ו- ADC בהתאמה.
א. הוכח: $DE \perp DF$.
ב. הנקודה G היא אמצע הקטע EF.
הוכח: $DG = EG$.

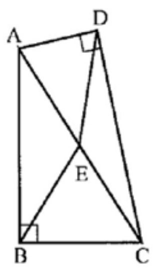


15. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
BD הוא התיכון ליתר AC.
הנקודה E נמצאת על הניצב BC.
נתון: $AE = CE$, $AE \perp BD$.
חשב את גודל הזווית C.

תשובה: $30°$.

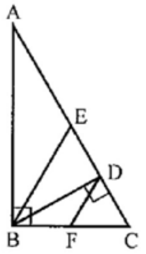


16. במרובע ABCD נתון: $AB \perp BC$, $AD \perp DC$.
נקודה E היא אמצע האלכסון AC.
א. הוכח: $BE = DE$.
ב. נתון: $\sphericalangle BCD = 82°$.
חשב את הזווית BED.

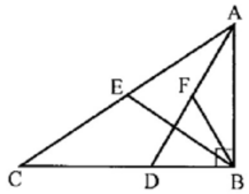


תשובה: ב. 164°.

17. במשולש ישר-זווית ABC ($AB \perp BC$)
BD הוא הגובה ליתר ו- BE הוא התיכון
ליתר. נקודה F היא אמצע הצלע BC.
הוכח: $\sphericalangle DFC = 2\sphericalangle ABE$.

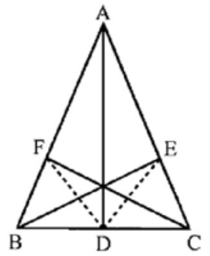


18. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
AD הוא חוצה-הזווית של $\sphericalangle BAC$.
E – אמצע הקטע AC, F – אמצע הקטע AD.
הוכח: BF חוצה את הזווית ABE.

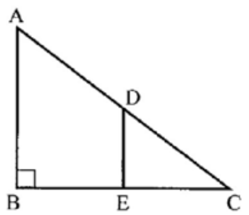


19. AD, BE ו- CF הם הגבהים של משולש
שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
נתון: $\sphericalangle ACB = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).
הבע באמצעות α את הזווית FDE.

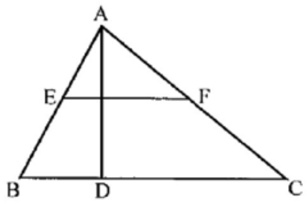
תשובה: $4\alpha - 180^\circ$.



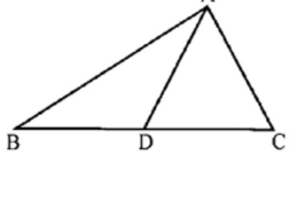
20. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
הנקודה D היא אמצע היתר AC.
נתון: $DE \parallel AB$.
הוכח: $BE = CE$.



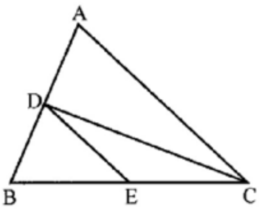
★ **21.** במשולש ABC AD הוא הגובה
לצלע BC. הנקודות E ו- F
נמצאות על הצלעות AB ו- AC
בהתאמה, כך ש- $AE = BE$, $AF = CF$.
הוכח: $EF \perp AD$.



22. בשרטוט נתון משולש ABC שבו AD
הוא התיכון לצלע BC.
נתון: $\sphericalangle ADC = 70^\circ$, $\sphericalangle BAD = 35^\circ$.
הוכח: $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

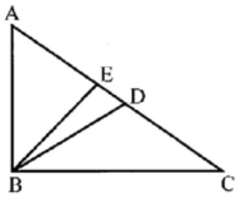


.23 בציור שלפניך נתון: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECD$,
$DE \parallel AC$, $BE = DE$.
א. הוכח: $AB \perp DC$.
ב. הוכח: $AC = BC$.



.24 BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC .
BE הוא חוצה-הזווית של $\sphericalangle ABC$.
נתון: $\sphericalangle C = 36^\circ$, $\sphericalangle ADB = 72^\circ$.
חשב את הזווית AEB .

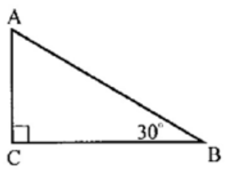
תשובה: 81° .



משולש ישר-זווית שבו אחת הזוויות היא בת 30°

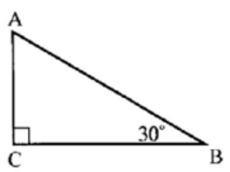
משפט: אם במשולש ישר-זווית אחת הזוויות החדות היא בת 30° , אזי הניצב שמול הזווית בת ה- 30° שווה למחצית היתר.

אם המשולש ABC הוא משולש
ישר-זווית ($AC \perp BC$)
ונתון: $\sphericalangle B = 30^\circ$, אזי $AC = \frac{1}{2}AB$.



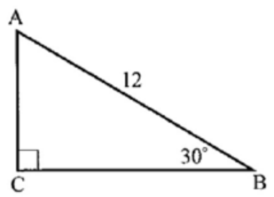
משפט: אם במשולש ישר-זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אזי הזווית שמול ניצב זה היא בת 30° .

אם המשולש ABC הוא משולש
ישר-זווית ($AC \perp BC$)
ונתון $AC = \frac{1}{2}AB$, אזי $\sphericalangle B = 30^\circ$.



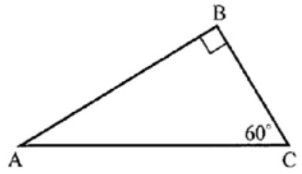
.25 המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) .
נתון: $AB =$ 12 ס"מ , $\sphericalangle B = 30^\circ$.
חשב את אורך הניצב AC .

תשובה: 6 ס"מ.

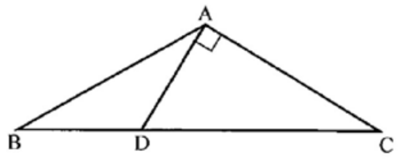


.26 המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$) .
היתר AC גדול ב- 4 ס"מ מהניצב BC .
נתון: $\sphericalangle C = 60^\circ$.
חשב את אורך היתר AC .

תשובה: 8 ס"מ.



.27 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
הנקודה D נמצאת על הבסיס BC
כך ש- $\sphericalangle DAC = 90^\circ$.
נתון: $BD = 4$ ס"מ , $\sphericalangle C = 30^\circ$.
חשב את אורך הבסיס BC.

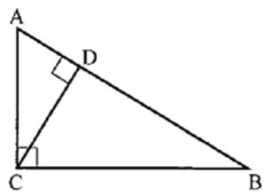


תשובה: 12 ס"מ.

.28 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$.
הזווית A גדולה פי שניים מהזווית B.
א. חשב את גודל הזווית B.
ב. נתון: $AC + AB = 6$ ס"מ. חשב את אורך הניצב AC.

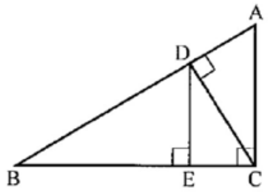
תשובה: א. 30°. ב. 2 ס"מ.

.29 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$.
CD הוא הגובה ליתר AB.
נתון: $\sphericalangle B = 30^\circ$, $AD = 4$ ס"מ.
א. חשב את אורך הצלע AC.
ב. חשב את אורך הקטע BD.



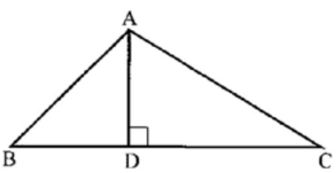
תשובה: א. 8 ס"מ. ב. 12 ס"מ.

.30 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AC \perp BC)$.
נתון: $CD \perp AB$, $DE \perp BC$, $\sphericalangle A = 60^\circ$,
$AC = 16$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע DE.



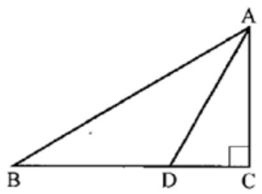
תשובה: 12 ס"מ.

.31 AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.
נתון: $AC = k$, $\sphericalangle C = 30^\circ$,
$\sphericalangle BAC = 105^\circ$.
הבע באמצעות k את אורך הקטע BD.

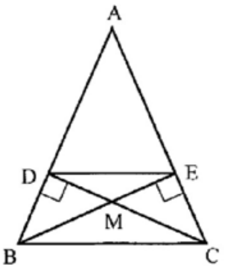


תשובה: $\frac{k}{2}$.

.32 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle C = 90^\circ)$.
AD הוא חוצה-הזווית של $\sphericalangle BAC$.
נתון: $\sphericalangle B = 30^\circ$.
הוכח: $BC = 3DC$.

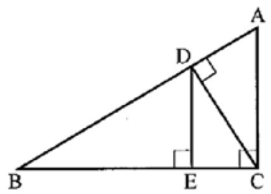


.33 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,
BE ו- CD הם גבהים הנפגשים בנקודה M .
א. (1) הוכח כי $BD = EC$.
(2) הוכח כי $DE \parallel BC$.
ב. נתון: $\measuredangle ABC = 60^\circ$.
מצא את היחס $\frac{DM}{MC}$.



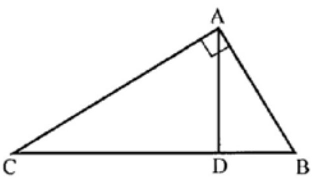
תשובה: ב. $\frac{1}{2}$.

.34 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AC \perp BC)$.
נתון: $CD \perp AB$, $DE \perp BC$,
$\measuredangle B = 30^\circ$, $DE = 4$ ס"מ .
חשב את אורך הצלע AC .
הדרכה: סמן: $AD = x$.



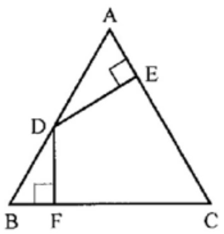
תשובה: $5\frac{1}{3}$ ס"מ.

.35 הנקודה D נמצאת על היתר BC
במשולש ישר-זווית ABC $(AB \perp AC)$.
נתון: $\measuredangle C = \measuredangle BAD = 30^\circ$, $CD = 33$ ס"מ .
חשב את אורך הצלע BC .



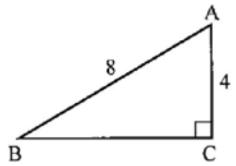
תשובה: 44 ס"מ.

.36 המשולש ABC הוא שווה-צלעות ואורך צלעו k .
מנקודה D הנמצאת על הצלע AB
מורידים אנכים DE ו- DF לצלעות
AC ו- BC . נתון: $FC = m$.
א. הבע באמצעות k ו- m את אורך הקטע CE .
ב. הסבר מדוע $\frac{1}{2}k < m < k$.



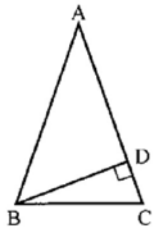
תשובה: א. $1\frac{1}{2}k - m$.

.37 במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle ACB = 90^\circ)$
נתון: $AC = 4$ ס"מ , $AB = 8$ ס"מ .
א. מהו גודל הזווית B ?
ב. חשב את הזווית A .



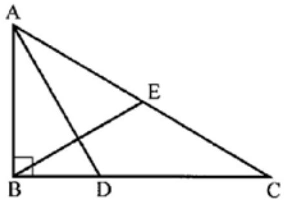
תשובה: א. 30° . ב. 60° .

.38 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD הוא הגובה לשוק AC .
נתון: $BD = \frac{1}{2}AC$.
חשב את הזווית DBC .



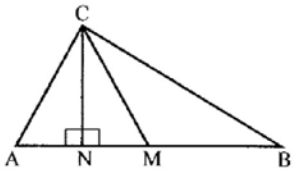
תשובה: 15° .

39. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).
BE הוא תיכון ליתר AC
ו- AD חוצה את הזווית BAC.
נתון: $AC = 2AB$. הוכח: $AD \perp BE$.

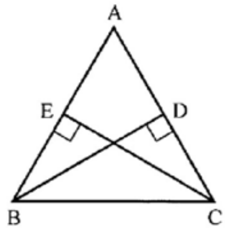


40. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$). D היא נקודה על הניצב AB.
נתון: $AD = 2 \cdot BD$, $\sphericalangle BCD = 30^\circ$. הוכח: DC חוצה את הזווית ACB.

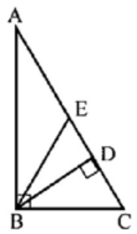
41. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AC \perp BC$).
M ו- N הם נקודות על היתר AB כך
ש- $AM = MB$, $CN \perp AB$. נתון: $BC = 2CN$.
הוכח כי הגובה CN והתיכון CM מחלקים
את הזווית ACB לשלוש זוויות שוות.



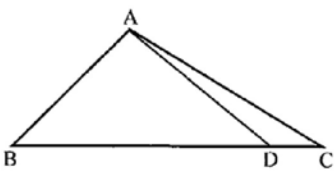
42. BD ו- CE הם גבהים במשולש ABC.
נתון: $DC = BE = \frac{1}{2}BC$.
הוכח: המשולש ABC הוא משולש
שווה צלעות.



43. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
BD הוא הגובה ליתר AC
ו- BE הוא תיכון ליתר AC.
נתון: $DE = \frac{1}{2}AE$.
הוכח: המשולש BCE הוא שווה-צלעות.

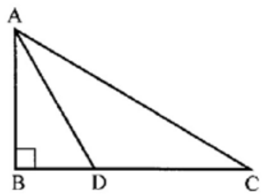


44★ במשולש ABC הנקודה D נמצאת
על הצלע BC. נתון: $\sphericalangle C = 30^\circ$,
$\sphericalangle DAC = 15^\circ$, $AB \perp AD$.
הוכח: $AC = BD$.



45★ המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
AD הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle BAC$.
נתון: $DC = 2BD$.
חשב את הזווית C.

תשובה: 30°.



46. הוכח את המשפט: **במשולש ישר-זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.**
הדרכה: הארך את התיכון כאורכו.

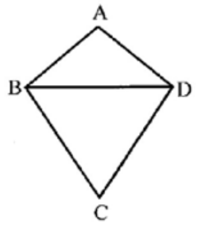
47. הוכח את המשפט: **אם במשולש, התיכון לצלע שווה למחצית הצלע שאותה הוא חוצה, אז המשולש הוא ישר-זווית.**

48. הוכח את המשפט: **במשולש ישר-זווית שבו אחת הזוויות החדות היא בת 30°, הניצב שמול הזווית בת ה- 30° שווה למחצית היתר.**

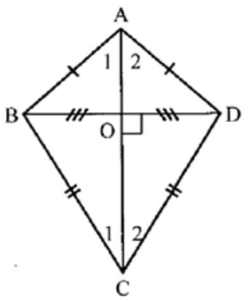
מרובעים

דלתון

מרובע הבנוי משני משולשים שווי-שוקיים בעלי בסיס משותף נקרא דלתון.



למשל, בציור מתוארים משולש שווה-שוקיים ABD ($AB = AD$) ומשולש שווה-שוקיים BCD ($BC = DC$). לשני המשולשים יש בסיס משותף BD והמרובע ABCD שנוצר הוא דלתון.



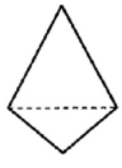
הקטע AC המחבר את קדקודי זוויות הראש של שני המשולשים נקרא **האלכסון הראשי** של הדלתון. הקטע BD שהוא הבסיס המשותף לשני המשולשים שווי-השוקיים נקרא **האלכסון המשני** של הדלתון.
הזוויות DAB ו- DCB נקראות **זוויות הראש** של הדלתון. הזוויות ADC ו- ABC נקראות **זוויות הבסיס** של הדלתון.

שים לב: זוויות הבסיס של הדלתון שוות זו לזו ($\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$).

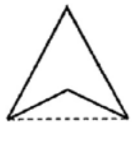
משפט הדלתון: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש של הדלתון, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

במילים אחרות, אם AC הוא האלכסון הראשי בדלתון, אזי הוא חוצה את זוויות הראש של הדלתון (כלומר: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$, $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$), הוא חוצה את האלכסון המשני BD (כלומר: $BO = DO$) והוא מאונך לאלכסון המשני BD (כלומר: $AC \perp BD$).

הערה: קיימים שני סוגי דלתונים:



(1) כאשר שני קדקודי זוויות הראש של שני המשולשים נמצאים משני צידי הבסיס המשותף, הדלתון נקרא דלתון קמור.



(2) כאשר שני קדקודי זוויות הראש של שני המשולשים נמצאים באותו צד של הבסיס המשותף, הדלתון נקרא דלתון קעור.

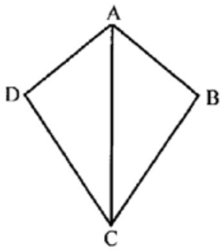
הוכחת דלתון

כדי להוכיח כי מרובע הוא דלתון יש להראות שהוא בנוי משני משולשים שווי-שוקיים בעלי בסיס משותף.

תרגילים

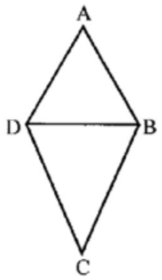
1. המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(AB = AD \ , \ BC = DC)$.
נתון: $\sphericalangle BAC = 56^\circ$, $\sphericalangle ABC = 92^\circ$.
א. מהו גודל הזווית ADC ?
ב. חשב את הזווית BAD.
ג. חשב את הזווית BCD.

תשובה: א. 92°. ב. 112°. ג. 64°.



2. המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(BC = DC \ , \ AB = AD)$.
נתון: $BD = AB$, $\sphericalangle ADC = 128^\circ$.
חשב את הזווית BCD.

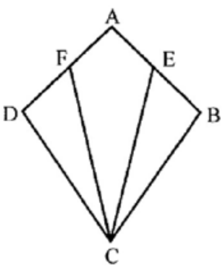
תשובה: 44°.



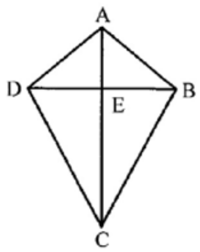
3. המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(AB = AD \ , \ BC = DC)$. נתון: $\sphericalangle ADC = 105^\circ$, $\sphericalangle BCD = 64^\circ$. חשב את הזווית ADB.

תשובה: 47°.

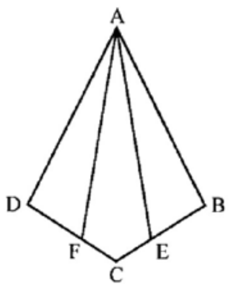
4. המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(AB = AD \ , \ BC = DC)$.
הנקודות E ו- F הן אמצעי הצלעות AB ו- AD בהתאמה.
הוכח: $CE = CF$.



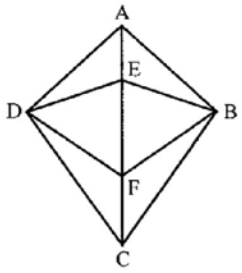
5. האלכסונים AC ו- BD של מרובע $ABCD$ מאונכים זה לזה.
נתון: $BE = DE$.
הוכח שהמרובע $ABCD$ הוא דלתון.



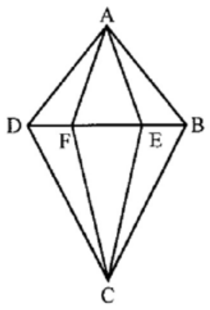
6. המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(AB = AD \ , \ BC = DC)$.
הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות BC ו- DC.
נתון: $BE = DF$.
א. הוכח: המרובע $AECF$ הוא דלתון.
ב. הוכח: הקטע AC חוצה את הקטע EF.



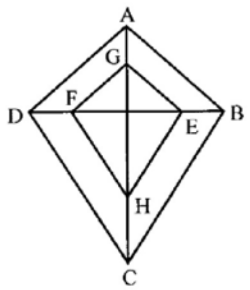
.7 המרובע $ABCD$ הוא דלתון
$(BC = DC \ , \ AB = AD)$.
הנקודות E ו- F נמצאות על
האלכסון AC של הדלתון.
הוכח: המרובע $BEDF$ הוא דלתון.



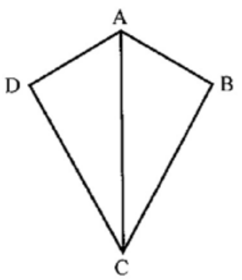
.8 המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(BC = DC \ , \ AB = AD)$.
הנקודות E ו- F נמצאות על האלכסון BD
כך שמתקיים $BE = DF$.
א. הוכח: המרובע $AECF$ הוא דלתון.
ב. הוכח: AC חוצה את FE.



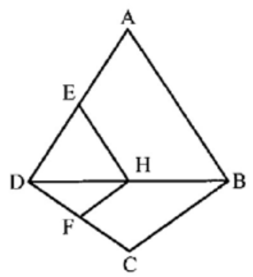
.9 המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(BC = DC \ , \ AB = AD)$.
הנקודות E ו- F נמצאות על
האלכסון BD כך ש- $BE = DF$.
הנקודות G ו- H נמצאות על האלכסון AC.
הוכח: המרובע $GEHF$ הוא דלתון.



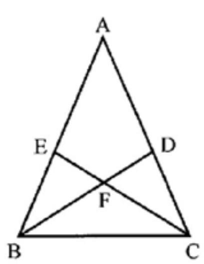
.10 במרובע $ABCD$ נתון: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$,
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$.
הוכח: $AC \perp BD$.



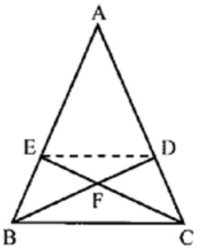
.11 המרובע $ABCD$ הוא דלתון $(CB = CD \ , \ AB = AD)$.
E , F ו- H הן נקודות על הקטעים
AD , CD ו- BD.
נתון: $EH \parallel AB \ , \ FH \parallel BC$.
א. הוכח: המרובע $EHFD$ הוא דלתון.
ב. הוכח: $EF \parallel AC$.



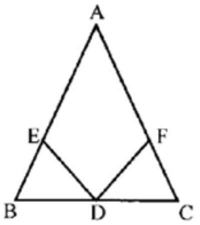
.12 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD חוצה את הזווית ABC
ו- CE חוצה את הזווית ACB.
BD ו- CE נפגשים בנקודה F.
הוכח: המרובע $AEFD$ הוא דלתון.



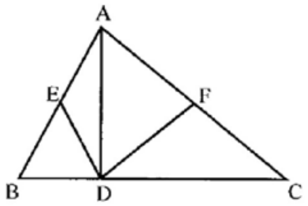
.13 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
הגבהים BD ו- CE נפגשים בנקודה F.
א. הוכח: המרובע AEFD הוא דלתון.
ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



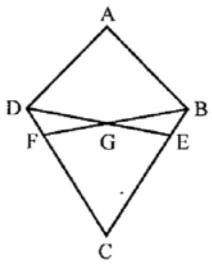
.14 הנקודה D נמצאת באמצע הבסיס BC
של משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
הנקודות E ו- F נמצאות על השוקיים
AB ו- AC בהתאמה כך ש- $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DEB$.
הוכח: $AD \perp EF$.



.15 AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.
הנקודות E ו- F נמצאות באמצעי
הצלעות AB ו- AC בהתאמה.
הוכח: המרובע AEDF הוא דלתון.

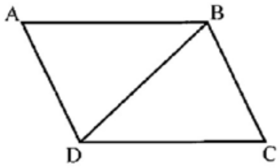


.16 המרובע ABCD הוא דלתון $(AB = AD\ ,\ BC = DC)$.
DE חוצה את הזווית ADC
ו- BF חוצה את הזווית ABC.
הוכח: המרובע ADGB הוא דלתון.



.17 הוכח את המשפט: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש,
חוצה את האלכסון המשני ומאונך לאלכסון המשני.

מקבילית

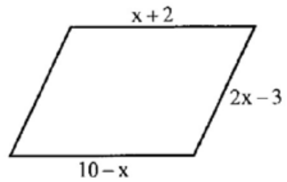


1. המרובע ABCD הוא מקבילית.
א. נתון : $\sphericalangle C = 52^\circ$. מהו גודל הזווית A ?
ב. נתון גם : $\sphericalangle BDC = 56^\circ$.
חשב את הזווית ADB .

תשובה: א. 52° . ב. 72° .

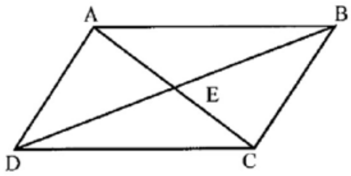
2. במקבילית ABCD הזווית C גדולה פי 2 מהזווית B .
חשב את זוויות המקבילית.

תשובה: 120° , 60° , 120° , 60° .



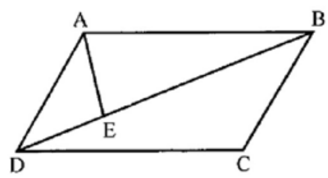
3. במקבילית שלפניך מסומנים באמצעות x אורכי הצלעות בס״מ.
א. מצא את x .
ב. חשב את היקף המקבילית.

תשובה: א. 4 ס״מ. ב. 22 ס״מ.



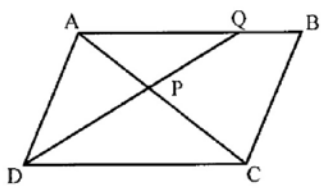
4. האלכסונים AC ו- BD של מקבילית ABCD נחתכים בנקודה E .
נתון : $AE = x + 6$, $CE = 2x + 2$.
חשב את אורך האלכסון AC .

תשובה: 20 ס״מ.



5. במקבילית ABCD נתון : $\sphericalangle BDC = 28^\circ$.
הנקודה E נמצאת על האלכסון BD כך ש- $AB = BE$.
א. חשב את הזווית AED .
ב. נתון : $AE = DE$. חשב את הזווית C .

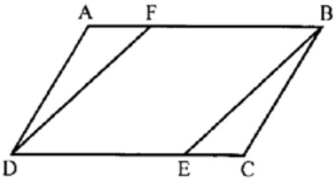
תשובה: א. 104° . ב. 114° .



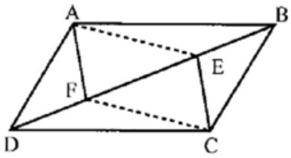
6. הנקודה Q נמצאת על הצלע AB של מקבילית ABCD . הקטע DQ חותך את האלכסון AC בנקודה P .
נתון : $AB = AC$, $AD = AQ$, $\sphericalangle DAC = \alpha$.
הבע באמצעות α הזווית APQ .

תשובה: $1\frac{1}{2}\alpha$.

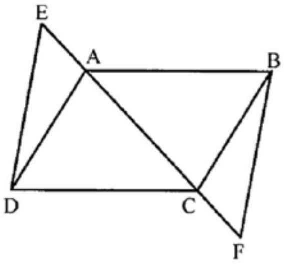
7. המרובע ABCD הוא מקבילית.
F ו- E הן נקודות על הצלעות
AB ו- DC. נתון: $AF = CE$.
הוכח: $\Delta ADF \cong \Delta CBE$.



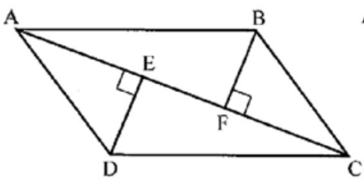
8. המרובע ABCD הוא מקבילית.
E ו- F הן נקודות על האלכסון BD.
נתון: $BE = DF$.
הוכח: $AE = CF$.



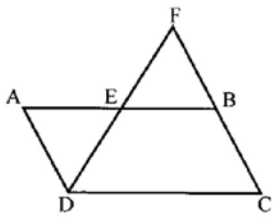
9. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות E ו- F נמצאות על המשך
האלכסון AC (ראה ציור).
נתון: $AE = CF$.
הוכח: $\sphericalangle EDC = \sphericalangle FBA$.



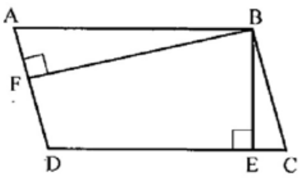
10. הנקודות E ו- F נמצאות על האלכסון AC
של מקבילית ABCD.
נתון: $BF \perp AC$, $DE \perp AC$.
א. הוכח: $BF = DE$.
ב. הוכח: $\sphericalangle ABF = \sphericalangle CDE$.



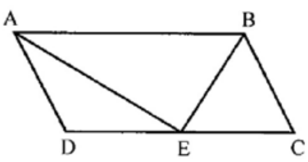
11. הנקודה E נמצאת על הצלע AB של
מקבילית ABCD. המשך הקטע DE
חותך את המשך הצלע CB בנקודה F.
נתון: $BF = BC$.
הוכח: $AE = \frac{1}{2}DC$.



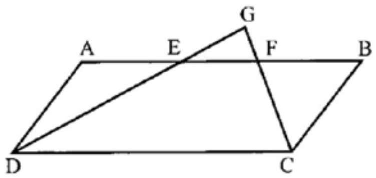
12. המרובע ABCD הוא מקבילית.
BE ו- BF הם גבהים במקבילית.
א. הוכח: $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EBC$.
ב. הוכח: $\sphericalangle FBE = \sphericalangle C$.



13. במקבילית ABCD הצלע AB ארוכה
פי 2 מהצלע BC. הנקודה E
נמצאת באמצע הצלע DC.
א. הוכח: AE חוצה את הזווית BAD.
ב. הוכח: $AE \perp BE$.

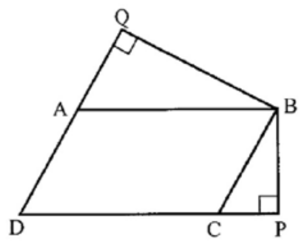


.14 הנקודות E ו- F נמצאות על הצלע AB של מקבילית ABCD.
המשכי הקטעים DE ו- CF נפגשים בנקודה G. נתון: $AD = AE = BF$.
הוכח: $DG \perp CG$.

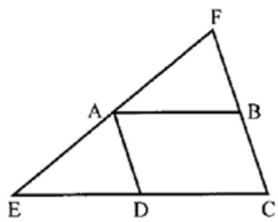


.15 המרובע ABCD הוא מקבילית.
נתון: $BQ \perp DQ$, $BP \perp DP$.
א. הוכח: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle PBQ$.
ב. נתון: $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ABQ$.
חשב את $\sphericalangle BAD$.

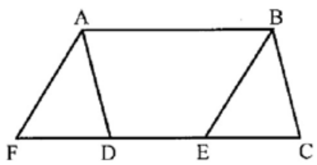
תשובה: ב. 120°.



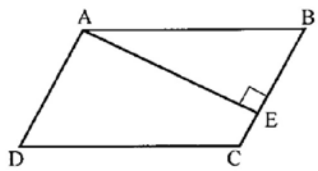
.16 המרובע ABCD הוא מקבילית.
E ו- F הן נקודות הנמצאות על המשכי הצלעות CD ו- CB. נתון: $AF = AB$.
א. הוכח: $AE = DE$.
ב. הוכח: AD חוצה את הזווית BAE.



.17 המרובעים ABCD ו- ABEF הם מקביליות.
הוכח: $FD = CE$.

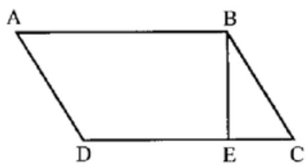


.18 המרובע ABCD הוא מקבילית.
AE הוא הגובה לצלע BC.
נתון: $\sphericalangle D = 60^\circ$.
הוכח: $BE = \frac{1}{2}DC$.

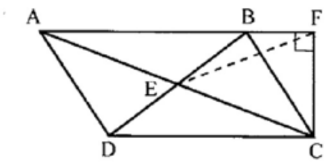


.19 המרובע ABCD הוא מקבילית.
BE הוא גובה לצלע DC.
נתון: $BC = 4$ ס"מ , $\sphericalangle ADC = 120^\circ$.
היקף המקבילית הוא 24 ס"מ.
חשב את אורך הקטע DE.

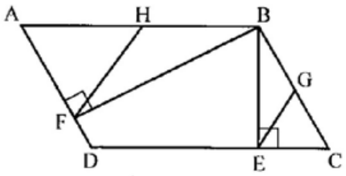
תשובה: 6 ס"מ.



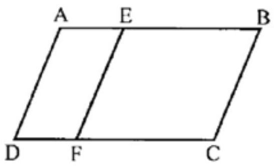
20. הנקודה E היא מפגש האלכסונים במקבילית ABCD . F נקודה על המשך הצלע AB .
נתון: $CF \perp AF$.
הוכח: $AE = FE$.



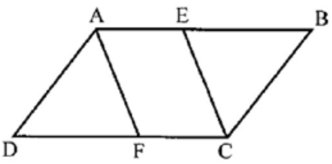
21. BE ו- BF הם גבהים במקבילית ABCD .
הנקודות G ו- H הן אמצעי הצלעות BC ו- AB בהתאמה.
הוכח: $\sphericalangle BGE = \sphericalangle BHF$.



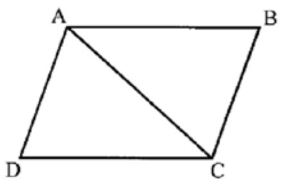
22. הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות AB ו- DC של מקבילית ABCD .
נתון: $EF \parallel AD$.
א. הוכח: המרובע ADFE הוא מקבילית.
ב. הוכח: $BE = CF$.



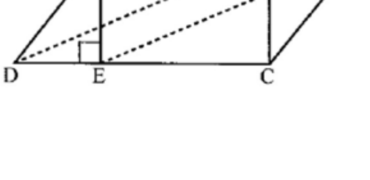
23. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות AB ו- CD בהתאמה. נתון: $AF \parallel CE$.
א. הוכח: המרובע AECF הוא מקבילית.
ב. הוכח: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BCE$.



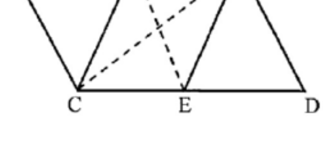
24. במרובע ABCD נתון: $\sphericalangle BAC = 35^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 75^\circ$, $\sphericalangle DAC = 70^\circ$.
הוכח: המרובע ABCD הוא מקבילית.



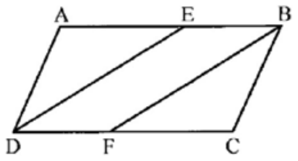
25. המרובע ABCD הוא מקבילית.
AE ו- CF הם גבהים במקבילית.
א. הוכח: המרובע DEBF הוא מקבילית.
ב. הוכח: $\Delta DCF \cong \Delta BAE$.



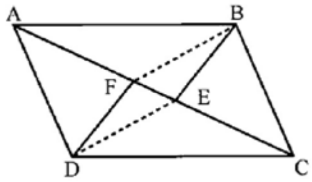
26. המרובע ABCD הוא מקבילית.
E אמצע הצלע DC , F אמצע הצלע AB .
א. הוכח: $AE \parallel CF$.
ב. הוכח: נקודת מפגש האלכסונים של המרובע AECF היא נקודת מפגש האלכסונים של המקבילית ABCD .



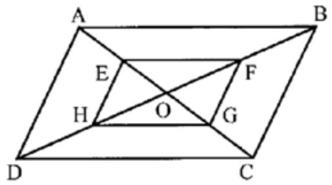
27. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטעים DE ו- BF חוצים את
הזוויות ADC ו- CBA בהתאמה.
הוכח: המרובע EBFD הוא מקבילית.



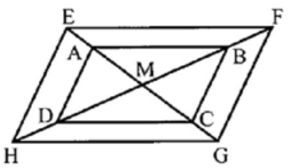
28. המרובע ABCD הוא מקבילית.
BE חוצה את הזווית ABC
ו- DF חוצה את הזווית ADC .
הוכח: המרובע BEDF הוא מקבילית



29. אלכסוני המקבילית ABCD נפגשים
בנקודה O . הנקודות E , F , G ו- H
נמצאות באמצעי הקטעים
AO , BO , CO ו- DO בהתאמה.
הוכח: המרובע EFGH הוא מקבילית.

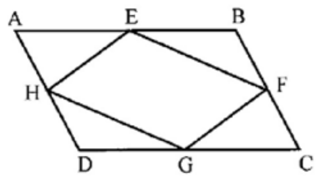


30. המרובע ABCD הוא מקבילית.
אלכסוני המקבילית נפגשים בנקודה M .
הנקודות E , F , G ו- H נמצאות
על המשכי האלכסונים AC ו- BD .
נתון: BF = DH , AE = CG .
הוכח: המרובע EFGH הוא מקבילית.

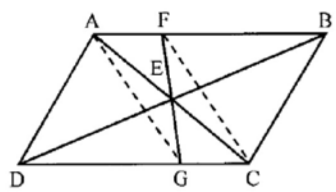


31. אלכסוני המרובע ABCD נחתכים בנקודה E . נתון: E – אמצע AC ,
AB || DC . הוכח: המרובע ABCD הוא מקבילית.

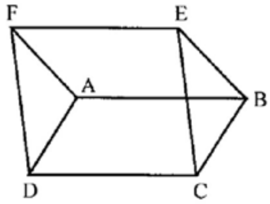
32. המרובע ABCD הוא מקבילית.
E , F , G ו- H הן אמצעי הצלעות
AB , BC , DC ו- AD בהתאמה.
א. הוכח: המרובע EFGH הוא מקבילית.
ב. הוכח: נקודת מפגש האלכסונים
במקבילית ABCD מתלכדת עם נקודת
מפגש האלכסונים במקבילית EFGH .
הדרכה: הראה שהקטעים BD ו- GE חוצים זה את זה.



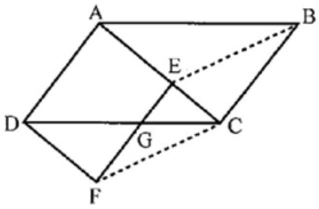
33. המרובע ABCD הוא מקבילית
שאלכסוניה נחתכים בנקודה E .
הנקודה E נמצאת על הקטע FG .
הוכח: המרובע AFCG
הוא מקבילית.



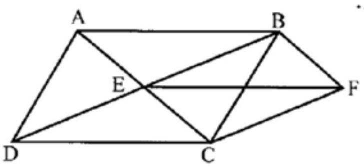
34. המרובעים ABCD ו- ABEF הן מקביליות.
א. הוכח: המרובע DCEF
הוא מקבילית.
ב. הוכח: $\Delta ADF \cong \Delta BCE$.



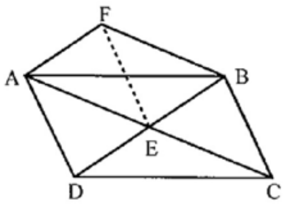
35. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודה E נמצאת על האלכסון AC .
המרובע AEFD הוא מקבילית.
א. הוכח: $BE = CF$.
ב. הוכח: $BE \parallel CF$.



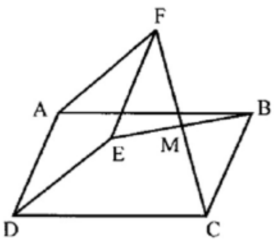
36. המרובעים DCFE ו- ABFE הם מקביליות.
א. הוכח: המרובע ABCD
הוא מקבילית.
ב. הוכח: המרובע EBFC
הוא מקבילית.



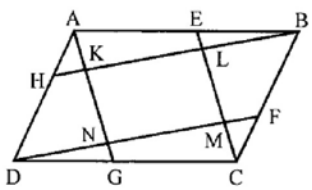
37. אלכסוני המקבילית ABCD נפגשים בנקודה E .
נתון: $AF \parallel BE$, $BF \parallel AE$.
א. הוכח: המרובע FBCE הוא מקבילית.
ב. הוכח: מרובע FEDA הוא מקבילית.



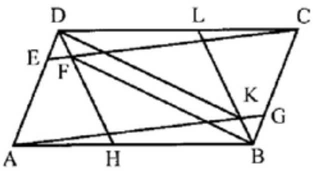
38. המרובעים ABCD ו- AFED
הם מקביליות. הקטעים FC
ו- EB נחתכים בנקודה M .
הוכח: $FM = MC$.



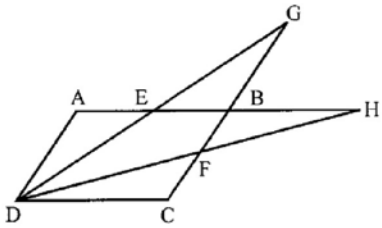
39. המרובע ABCD הוא מקבילית.
E , F , G ו- H הן נקודות על צלעות
המקבילית. נתון: $AH = CF$, $BE = DG$.
א. הוכח: המרובע BFDH הוא מקבילית.
ב. הוכח: המרובע AECG הוא מקבילית.
ג. הוכח: המרובע KLMN הוא מקבילית.



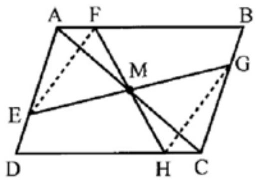
★ 40. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות H , E , L , G נמצאות
על צלעות המקבילית.
נתון: DH || BL , CE || AG .
הוכח: המרובע DFBK הוא מקבילית.



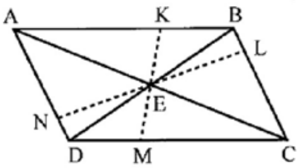
★ 41. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות E ו- F הן אמצעי
הצלעות AB ו- BC בהתאמה.
הוכח: המרובע AGHC הוא מקבילית.



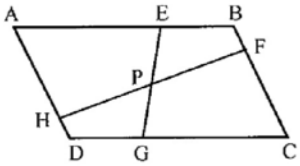
42. הנקודה M היא מפגש האלכסונים
במקבילית ABCD .
הנקודות E , F , G ו- H נמצאות
על צלעות המקבילית (ראה ציור).
א. הוכח: EM = GM .
ב. הוכח: EF || GH .



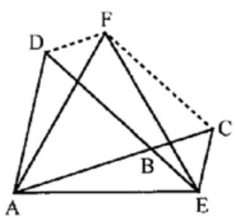
43. אלכסוני המקבילית ABCD נפגשים בנקודה E .
הנקודות K , L , M ו- N נמצאות
על צלעות המקבילית כך שהקטעים
KM ו- LN עוברים דרך נקודה E .
א. הוכח: KN = ML .
ב. הוכח: KL || MN .



★ 44. הנקודות E , F , G ו- H נמצאות
על צלעותיה של מקבילית ABCD
כך ש- AE = CG , BF = HD .
הוכח: PE = PG , PF = PH .



45. המשולשים BCE , ABD ו- AEF הם
משולשים שווי-צלעות.
א. הוכח: $\Delta DAF \cong \Delta BAE$.
ב. הוכח: DF = BC .
ג. הוכח: המרובע DBCF הוא מקבילית.



★ 46. הוכח: אורך התיכון במשולש קטן מהממוצע של אורכי שתי הצלעות
שלידו.

47. הוכח: סכום האלכסונים במקבילית גדול מסכום שתי צלעות סמוכות
וקטן מהיקף המקבילית.

48. הוכח את המשפט: **כל שתי זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.**

49. הוכח את המשפט: **כל שתי צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.**

50. הוכח את המשפט: **האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.**

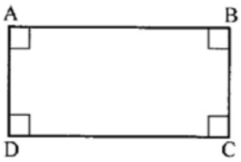
51. הוכח את המשפט: **מרובע שבו יש שני זוגות של צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.**

52. הוכח את המשפט: **מרובע שבו יש שני זוגות של זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.**

53. הוכח את המשפט: **מרובע שבו יש זוג צלעות נגדיות שהן שוות וגם מקבילות הוא מקבילית.**

54. הוכח את המשפט: **מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.**

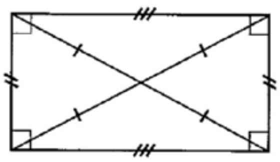
מלבן



הגדרה: מרובע שכל זוויותיו ישרות נקרא מלבן.

למשל, בציור מתואר מלבן ABCD
ולכן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$.

תכונות המלבן



(1) כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו ומקבילות זו לזו.
(2) כל אחת מזוויות המלבן היא בת 90°.
(3) האלכסונים חוצים זה את זה ושווים זה לזה.
(4) אלכסוני המלבן יוצרים ארבעה משולשים שווי-שוקיים.

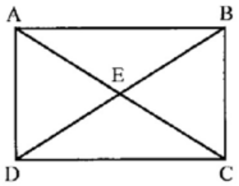
הוכחת מלבן

כדי להוכיח שמרובע הוא מלבן נפעל באחת הדרכים הבאות:
א. נוכיח שכל זוויות המרובע הן ישרות. דרך הוכחה זו מתבססת על הגדרות מלבן.
ב. נוכיח שהמרובע הוא מקבילית, ובנוסף נוכיח שאחת מזוויות המרובע היא ישרה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט:
מקבילית בעלת זווית אחת ישרה היא מלבן.
ג. נוכיח שהמרובע הוא מקבילית, ובנוסף נוכיח שאלכסוני המרובע שווים זה לזה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט:
מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.

שים לב! בדרך ההוכחה שבסעיף א' הוכחנו מלבן לפי ההגדרה הראשונה שלו. בדרכים ב' ו-ג' הוכחנו תחילה שהמרובע הוא מקבילית ובנוסף הוכחנו שבמרובע קיימת תכונה של מלבן שאין במקבילית.

תרגילים

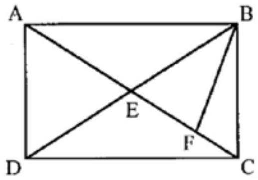
.1 המרובע ABCD הוא מלבן שאלכסוניו
נפגשים בנקודה E . נתון: $\sphericalangle EBC = 58^\circ$.
א. חשב את הזווית ABD .
ב. חשב את הזווית AED .



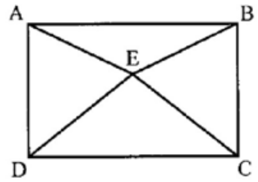
תשובה: א. 32° . ב. 64° .

.2 המרובע ABCD הוא מלבן שאלכסוניו נפגשים בנקודה E .
הוכח: $\sphericalangle DEC = 2 \cdot \sphericalangle EBC$.

.3 אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה E .
F היא נקודה על הקטע CE .
נתון: $AB = AF$.
הוכח: $\sphericalangle AED = 4\sphericalangle FBC$.

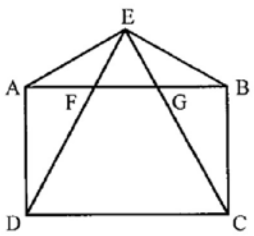


.4 הנקודה E נמצאת בתוך מלבן ABCD .
נתון: $DE = CE$.
א. הוכח: $AE = BE$.
ב. נתון: $\sphericalangle AEB = 130^\circ$, $\sphericalangle BCE = 55^\circ$.
חשב את הזווית BEC .

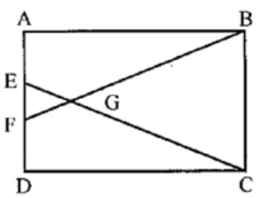


תשובה: ב. 60° .

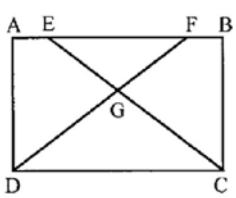
.5 המרובע ABCD הוא מלבן.
הנקודה E נמצאת מחוץ
למלבן כך ש- $AE = BE$.
א. הוכח: $DE = CE$.
ב. הוכח: $EF = EG$.

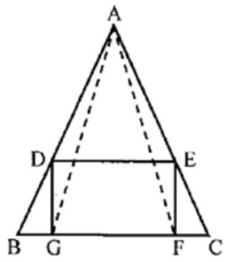


.6 הנקודות E ו- F נמצאות על הצלע AD
של מלבן ABCD . הקטעים CE ו- BF
נפגשים בנקודה G . נתון: $CE = BF$.
א. הוכח: $AE = DF$.
ב. הוכח: $GE = GF$.

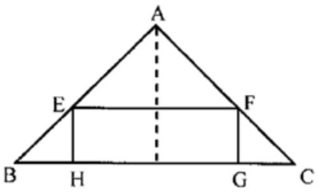


.7 הנקודות E ו- F נמצאות על הצלע AB
של מלבן ABCD . הקטעים CE ו- DF
נפגשים בנקודה G . נתון: $AE = BF$.
א. הוכח: $DG = CG$.
ב. הוכח: מרחק הנקודה F מהקטע CE
שווה למרחק הנקודה E מהקטע DF .



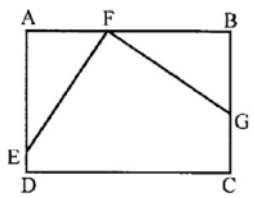


8. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
המלבן $DEFG$ חסום בתוך המשולש.
הוכח: $AG = AF$.

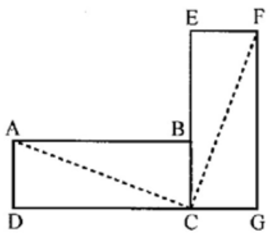


9. המשולש ABC הוא ישר-זווית ושווה-שוקיים $(\sphericalangle BAC = 90^\circ)$. המלבן $EFGH$ שהיקפו 16 ס"מ חסום בתוך המשולש.
אורך הגובה המורד מקדקוד A לצלע BC הוא 5 ס"מ.
חשב את אורך הקטע EH.

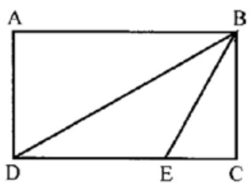
תשובה: 2 ס"מ.



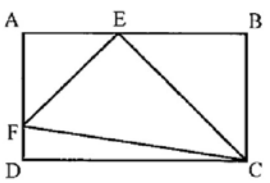
10. הנקודות E, F ו-G נמצאות על צלעות המלבן $ABCD$.
נתון: $AE = BF$, $AF = BG$.
א. הוכח: $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BGF$
ב. הוכח: $EF \perp GF$.



11. בציור מתוארים שני מלבנים זהים – מלבן $ABCD$ ומלבן $CEFG$.
הוכח: $AC \perp CF$.

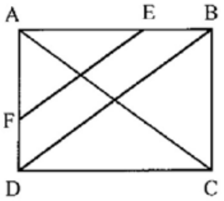


12. הנקודה E נמצאת על הצלע DC של מלבן $ABCD$. נתון: $BE = DE$.
א. הוכח: BD חוצה את הזווית ABE.
ב. הנקודה F היא אמצע הקטע BE.
הוכח: $\sphericalangle BFC = 4 \cdot \sphericalangle ABD$.

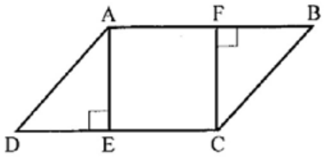


13. המרובע $ABCD$ הוא מלבן. הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך ש-$BC = BE$. הנקודה F נמצאת על הצלע AD כך ש-$AE = AF$.
א. הוכח: $FE \perp CE$.
ב. נקודה G היא אמצע הקטע CF.
הוכח: $GD = GE$.

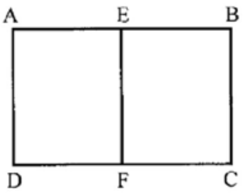
.14 הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות
AB ו- AD של מלבן ABCD .
נתון : $FE \parallel BD$.
הוכח : האלכסון AC
חוצה את הקטע FE .



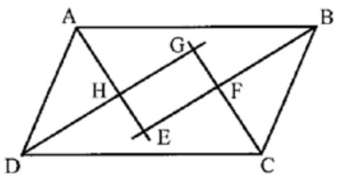
.15 המרובע ABCD הוא מקבילית.
AE ו- CF הם גבהים במקבילית.
הוכח : המרובע AECF הוא מלבן.



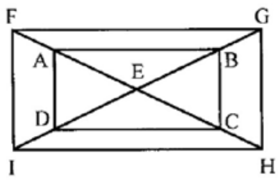
.16 המרובע ABCD הוא מלבן.
הנקודות E ו- F נמצאות באמצעי
הצלעות AB ו- DC בהתאמה.
א. הוכח : $EF \perp AB$.
ב. האלכסון BD חותך את הקטע EF
בנקודה G . הוכח : $GE = GF$.



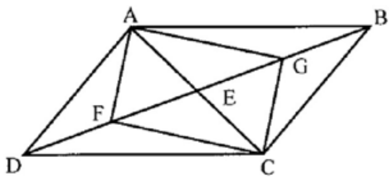
.17 המרובע ABCD הוא מקבילית.
AE , BF , CG ו- DH חוצים את
הזוויות הפנימיות של המקבילית.
הוכח : המרובע EFGH הוא מלבן.



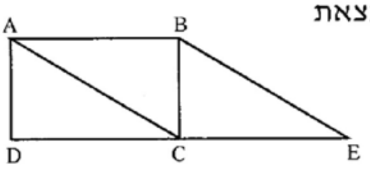
.18 המרובע ABCD הוא מלבן שאלכסוניו
נפגשים בנקודה E .
ממשיכים את האלכסונים BD ו- AC
כך שמתקיים $AF = BG = CH = DI$.
הוכח : המרובע FGHI הוא מלבן.



.19 המרובע ABCD הוא מקבילית
שאלכסוניה נפגשים בנקודה E .
נתון : $BD = 2AC$. הנקודות F ו- G
נמצאות על הקטעים DE ו- BE
בהתאמה. נתון : $EG = BG$, $DF = FE$.
הוכח : המרובע AGCF הוא מלבן.



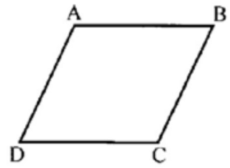
.20 המרובע ABCD הוא מלבן. הנקודה E נמצאת
על המשך הצלע DC . נתון : $BE \parallel AC$.
א. הוכח : המרובע ABEC
הוא מקבילית.
ב. הוכח : BC חוצה את הזווית DBE .



.21 הוכח את המשפט : **האלכסונים במלבן שווים זה לזה.**

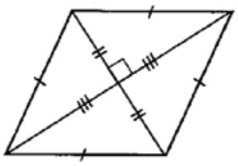
.22 הוכח את המשפט : **מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.**

מעוין



הגדרה: מרובע שכל צלעותיו שוות נקרא מעוין.
למשל, בציור מתואר מעוין ABCD
ולכן מתקיים: $AB = BC = CD = DA$.

תכונות המעוין



(1) כל צלעות המעוין שוות זו לזו.
(2) כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
(3) כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו
וכל שתי זוויות סמוכות משלימות
זו את זו ל- $180°$.
(4) האלכסונים חוצים זה את זה, מאונכים
זה לזה וחוצים את זוויות המעוין.

הוכחת מעוין

כדי להוכיח שמרובע הוא מעוין נפעל באחת הדרכים הבאות:

א. נוכיח שכל צלעות המרובע שוות זו לזו.
דרך הוכחה זו מתבססת על הגדרת המעוין.

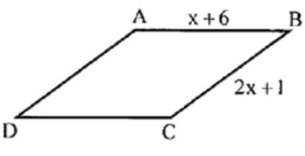
ב. נוכיח שהמרובע הוא מקבילית, ובנוסף נוכיח שיש במרובע שתי צלעות סמוכות שוות. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט:
מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.

ג. נוכיח שהמרובע הוא מקבילית, ובנוסף נוכיח שאלכסוני המרובע מאונכים זה לזה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט:
מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

ד. נוכיח שהמרובע הוא מקבילית, ובנוסף נוכיח שיש במרובע אלכסון החוצה את אחת מזוויות המרובע. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט: **מקבילית שבה האלכסון הוא חוצה-זווית היא מעוין.**

שים לב! בדרך ההוכחה המפורטת בסעיף א׳ הוכחנו מעוין לפי ההגדרה שלו. בדרכים ב׳, ג׳ ו-ד׳ הוכחנו תחילה שהמרובע הוא מקבילית ובנוסף הוכחנו שבמרובע קיימת תכונה של מעוין שאין במקבילית.

תרגילים

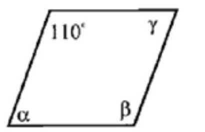


1. בציור שלפניך מתואר מעוין ABCD.
א. מצא את x.
ב. חשב את היקף המעוין.

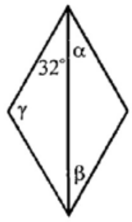
תשובה: א. 5. ב. 44.

2. חשב את הזוויות α, β ו- γ במעוינים הבאים:

א.

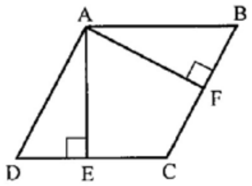


ב.

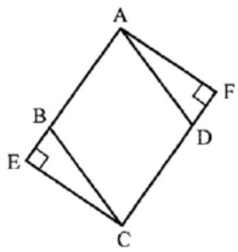


תשובה: א. $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 110^\circ$, $\gamma = 70^\circ$. **ב.** $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 32^\circ$, $\gamma = 116^\circ$.

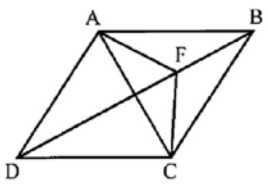
3. המרובע ABCD הוא מעוין.
AE ו- AF הם הגבהים
לצלעות DC ו- BC בהתאמה.
א. הוכח: $\Delta ADE \cong \Delta ABF$.
ב. הוכח: $CE = CF$.



4. המרובע ABCD הוא מעוין.
AF ו- CE הם גבהים לצלעות
CD ו- AB (ראה ציור).
הוכח: $AE = AD + DF$.

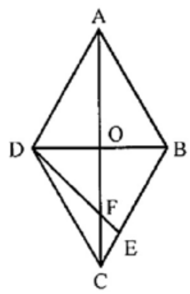


5. המרובע ABCD הוא מעוין.
F היא נקודה הנמצאת
על האלכסון BD.
הוכח: המשולש ACF הוא שווה-שוקיים.

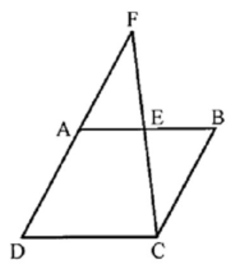


6. אלכסוני המעוין ABCD
נפגשים בנקודה O.
נתון: $DE = 2OF$, $OF = \frac{1}{2}DB$.
חשב את זוויות המשולש CFE.

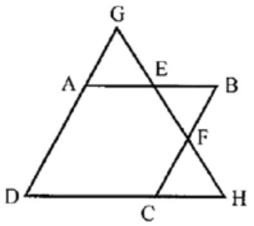
תשובה: 45°, 22.5°, 112.5°.



7. המרובע ABCD הוא מעוין.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע AB.
המשכי הקטעים CE ו- DA
נפגשים בנקודה F.
הוכח: $DF = 4BE$.

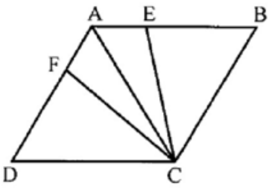


8. המרובע ABCD הוא מעוין.
הנקודות E ו- F הן אמצעי
הצלעות AB ו- BC בהתאמה.
א. הוכח: $GE = FH$.
ב. חשב את היחס $CF : DG$.

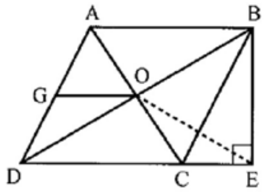


תשובה: ב. $1:3$.

9. הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות
AB ו- AD של מעוין ABCD .
נתון: $\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCF$.
הוכח: $FE \parallel DB$.

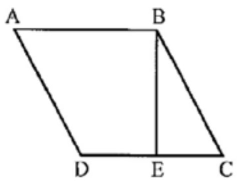


10. המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסוניו
נפגשים בנקודה O . נתון: $DE \perp BE$.
א. הוכח: $OE = OB$.
ב. הנקודה G היא אמצע הצלע AD
והיקף המעוין הוא 32 ס"מ.
חשב את אורך הקטע OG .



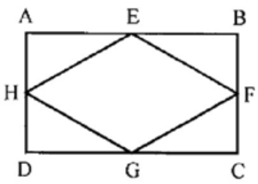
תשובה: ב. 4 ס"מ.

11. המרובע ABCD הוא מעוין שהיקפו 24 ס"מ.
BE הוא גובה לצלע DC . נתון: $\sphericalangle D = 120^\circ$.
א. חשב את אורך הקטע DE .
ב. אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה O .
הוכח: $OE = OD$.

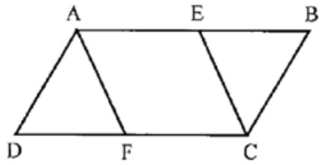


תשובה: א. 3 ס"מ.

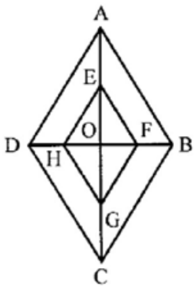
12. המרובע ABCD הוא מלבן.
הנקודות G , F , E ו- H הן אמצעי
הצלעות AB , BC, CD ו- AD .
הוכח: המרובע EFGH הוא מעוין.



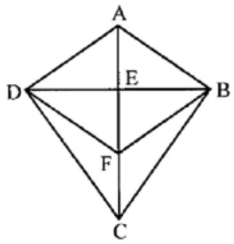
13. המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות E ו- F נמצאות על הצלעות
AB ו- DC . נתון: $BE = DF$, $AE = CE$.
א. הוכח: המרובע AECF הוא מעוין.
ב. הוכח: מפגש האלכסונים של המקבילית
ABCD והמעוין AECF הוא באותה נקודה.



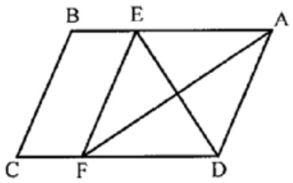
.14 המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסוניו
נפגשים בנקודה O.
הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי
הקטעים AO, BO, CO ו- DO בהתאמה.
הוכח: המרובע EFGH הוא מעוין.



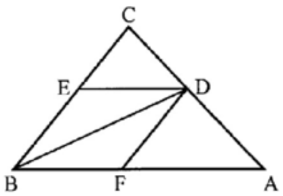
.15 המרובע ABCD הוא דלתון $(AB=AD\ ,\ BC=DC)$
שאלכסוניו נפגשים בנקודה E.
נתון: $CE=2AE$, F אמצע הקטע CE.
הוכח: המרובע ABFD הוא מעוין.



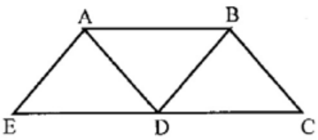
.16 במקבילית ABCD, הנקודות E ו- F
נמצאות על הצלעות AB ו- DC,
כך ש- AF חוצה את הזווית BAD
ו- DE חוצה את הזווית ADC.
הוכח: המרובע ADFE הוא מעוין.



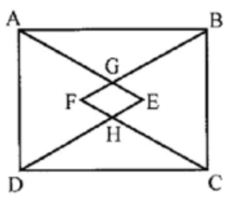
.17 BD הוא חוצה-זווית B במשולש ABC.
D, E ו- F הן נקודות על צלעות המשולש.
נתון: $DE \parallel BF\ ,\ FD \parallel BC$.
א. הוכח: המרובע BEDF הוא מעוין.
ב. הוכח: אם $BD \perp AC$, אזי $BE=CE$.



.18 המרובעים ABCD ו- ABDE הם מקביליות.
א. הוכח: $DE=DC$.
ב. נתון גם: $BE \perp BC$.
הוכח שהמרובע ABDE הוא מעוין.



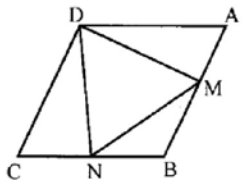
.19 על הצלעות AD ו- BC של מלבן ABCD
בנו משולשים שווי-צלעות ADE ו- BCF.
AE ו- BF נחתכים בנקודה G.
DE ו- CF נחתכים בנקודה H.
הוכח: המרובע EGFH הוא מעוין.



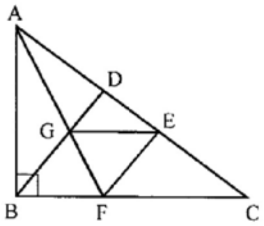
.20 המרובע ABCD הוא דלתון $(AB=AD\ ,\ BC=DC)$. נתון: $AB \parallel DC$.
הוכח: המרובע ABCD הוא מעוין.

21. המרובע ABCD הוא מקבילית. נתון: $AB = BC$. הוכח: $AC \perp BD$.

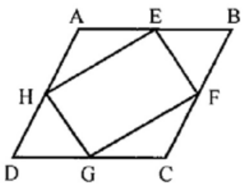
★ 22. המרובע ABCD הוא מעוין, שזוויתו החדה היא בת 60°. M ו- N הן נקודות על צלעות המעוין כך שסכום הקטעים BM ו- BN שווה לאורך צלע המעוין.
הוכח: המשולש DMN הוא שווה-צלעות.
הדרכה: העבר את האלכסון BD.



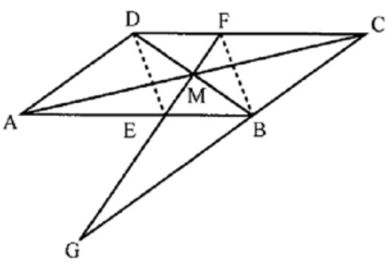
★ 23. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp BC$).
BD הוא הגובה ליתר AC.
E נקודה על DC.
נתון: $AE = AB$, $EF \perp AC$.
הוכח: המרובע BGEF הוא מעוין.



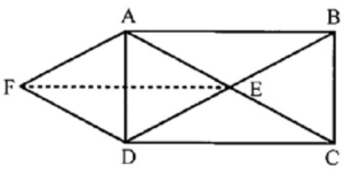
★ 24. המרובע ABCD הוא מעוין.
הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו- AD.
א. הוכח: המרובע EFGH הוא מלבן.
ב. הוכח: מפגש האלכסונים של המעוין ABCD והמלבן EFGH הוא באותה נקודה.



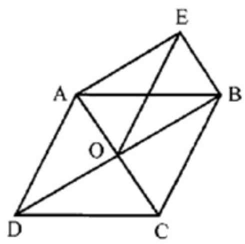
25. אלכסוני המקבילית ABCD נפגשים בנקודה M. הישר המאונך לאלכסון BD בנקודה M, חותך את AB בנקודה E, ואת המשך הצלע BC בנקודה G.
א. הוכח: $BG = DG$.
ב. הוכח: המרובע EBFD הוא מעוין.



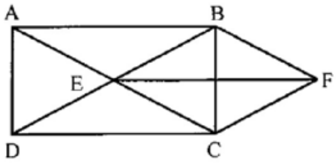
26. אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה E. נתון: $AF = DE$, $DF = AE$.
א. הוכח: המרובע AEDF הוא מעוין.
ב. הוכח: המרובע ABEF הוא מקבילית.



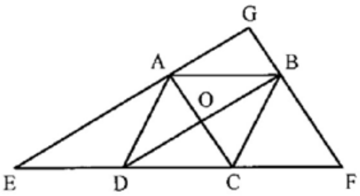
27. אלכסוני המעוין ABCD נפגשים בנקודה O.
המרובע BCOE הוא מקבילית.
א. הוכח: המרובע ADOE הוא מקבילית.
ב. הוכח: המרובע AOBE הוא מלבן.



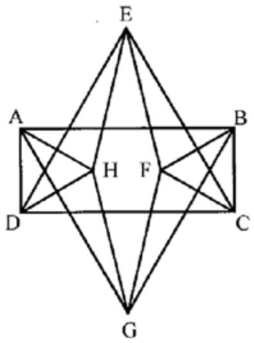
28. המרובע $ABCD$ הוא מלבן.
הנקודה F נמצאת מחוץ למלבן
כך שהמרובע $DCFE$ הוא מקבילית.
א. הוכח: המרובע $CEBF$ הוא מעוין.
ב. הוכח: $AC=2CF$.



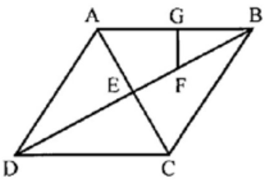
29. המרובע $ABCD$ הוא מעוין
שאלכסוניו נפגשים בנקודה O .
נתון: $AE \parallel BD$, $BF \parallel AC$.
המשכי הקטעים FB ו- EA
נפגשים בנקודה G .
הוכח: המרובע $AGBO$ הוא מלבן.



30. המרובע $ABCD$ הוא מלבן
שעל צלעותיו בנו 4 משולשים
שווי-צלעות.
הוכח: המרובע $EFGH$ הוא מעוין.



★31. אלכסוני המעוין $ABCD$ נפגשים בנקודה E .
F נקודה על הקטע BE .
נתון: $FG \perp AB$, $AD=CE+BG$.
הוכח: $EF=GF$.



32. הוכח את המשפט: **האלכסונים במעוין חוצים את זוויות המעוין.**

33. הוכח את המשפט: **האלכסונים במעוין מאונכים זה לזה.**

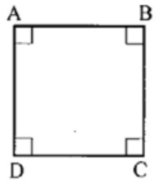
34. הוכח את המשפט: **אם האלכסונים במרובע חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה, אז המרובע הוא מעוין.**

35. הוכח את המשפט: **מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.**

36. הוכח את המשפט: **מקבילית שבה האלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.**

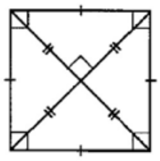
ריבוע

הגדרה: מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו ישרות נקרא ריבוע.



למשל, בציור מתואר ריבוע ABCD
ולכן מתקיים : $AB = BC = CD = DA$,
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$.

תכונות הריבוע



(1) כל צלעות הריבוע שוות זו לזו.
(2) כל אחת מזוויות הריבוע היא בת 90° .
(3) כל שתי צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
(4) אלכסוני הריבוע חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה, שווים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

הוכחת ריבוע

כדי להוכיח שמרובע הוא ריבוע נפעל באחת הדרכים הבאות :

א. נוכיח שכל צלעות המרובע שוות זו לזו ושכל אחת מזוויות המרובע היא בת 90° . דרך הוכחה זו מתבססת על הגדרת הריבוע.

ב. נוכיח שהמרובע הוא מלבן, ובנוסף נוכיח שיש במרובע שתי צלעות סמוכות שוות. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט :
מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.

ג. נוכיח שהמרובע הוא מלבן, ובנוסף נוכיח אלכסון החוצה את אחת מזוויות המרובע. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט :
מלבן שבו האלכסון הוא חוצה-זווית הוא ריבוע.

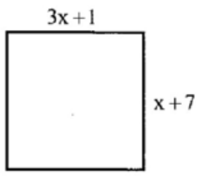
ד. נוכיח שהמרובע הוא מלבן, ובנוסף נוכיח שאלכסוני המרובע מאונכים זה לזה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט :
מלבן שבו האלכסונים מאונכים זה לזה הוא ריבוע.

ה. נוכיח שהמרובע הוא מעוין, ובנוסף נוכיח שאחת מזוויות המרובע היא ישרה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט :
מעוין שאחת מזוויותיו היא ישרה הוא ריבוע.

ו. נוכיח שהמרובע הוא מעוין, ובנוסף נוכיח שאלכסוני המרובע שווים זה לזה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט :
מעוין שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא ריבוע.

שים לב! בדרך ההוכחה שבסעיף א׳ מוכיחים ריבוע לפי ההגדרה שלו. בדרכים שבסעיפים ב׳, ג׳ ו-ד׳ מוכיחים תחילה שהמרובע הוא מלבן ובנוסף מוכיחים שבמרובע קיימת תכונה שיש בריבוע ואין במלבן. בדרכים שבסעיפים ה׳ ו-ו׳ מוכיחים תחילה שהמרובע הוא מעוין ובנוסף מוכיחים שבמרובע קיימת תכונה שיש בריבוע ואין במעוין.

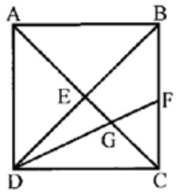
תרגילים



1. בציור מתואר ריבוע ועליו מסומנים אורכי צלעותיו באמצעות x .
חשב את היקף הריבוע.

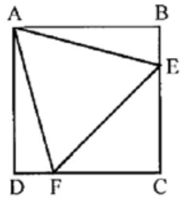
תשובה: 40 .

2. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה E .
DF חוצה את הזווית BDC .
DF ו- AC נחתכים בנקודה G .
א. חשב את הזווית DGE .
ב. הוכח: $CG = CF$, $AD = AG$.



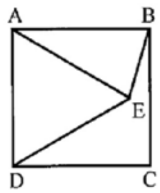
תשובה: א. 67.5° .

3. המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודות E ו- F
נמצאות על הצלעות BC ו- DC בהתאמה.
נתון: $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFD = 75^\circ$.
א. הוכח: המשולש AEF הוא שווה צלעות.
ב. חשב את זוויותיו של המשולש CEF .



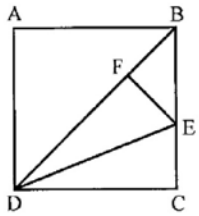
תשובה: ב. 90° , 45° , 45° .

4. המרובע ABCD הוא ריבוע והמשולש ADE
הוא משולש שווה צלעות.
א. הוכח: $DE = AB$.
ב. חשב את זוויותיו של המשולש ABE .

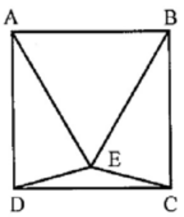


תשובה: ב. 30° , 75° , 75° .

5. המרובע ABCD הוא ריבוע.
הקטע DE חוצה את הזווית BDC .
נתון: $EF \perp BD$.
הוכח: $CE = BF$.

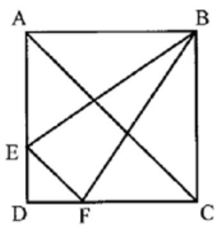


6. המרובע ABCD הוא ריבוע.
הנקודה E נמצאת בתוך הריבוע
כך שמתקיים $DE = CE$.
א. הוכח: $AE = BE$.
ב. נתון: $\sphericalangle AEB = 60^\circ$.
חשב את הזווית DEC .

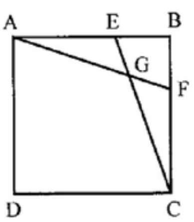


תשובה: ב. 150° .

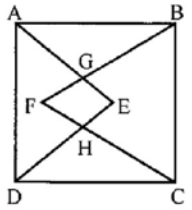
7. הנקודות E ו- F נמצאות
על הצלעות AD ו- DC
של ריבוע ABCD .
נתון: $EF \parallel AC$. הוכח: $BE = BF$.



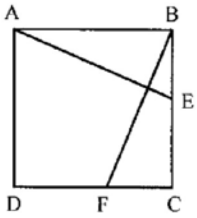
8. בריבוע ABCD הנקודות E ו- F
נמצאות על הצלעות AB ו- BC
בהתאמה. נתון: $BE = BF$.
א. הוכח: $AF = CE$.
ב. הוכח: המרובע AGCD הוא דלתון.



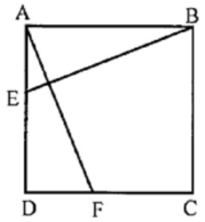
9. על הצלעות AD ו- BC של ריבוע ABCD
בנו משולשים שווי-שוקיים:
משולש ADE $(AE = DE)$
ומשולש BCF $(BF = CF)$.
הוכח: המרובע EHFG הוא דלתון.



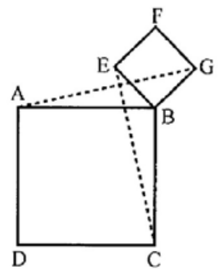
10. בריבוע ABCD הנקודות E ו- F
נמצאות על הצלעות BC ו- CD
בהתאמה. נתון: $AE = BF$.
א. הוכח: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CBF$.
ב. הוכח: $AE \perp BF$.



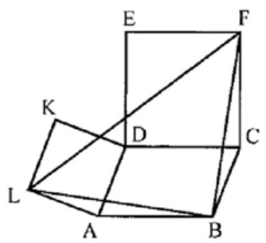
11. בריבוע ABCD, הנקודות E ו- F
נמצאות על הצלעות AD ו- DC
בהתאמה. נתון: $AF \perp BE$.
א. הוכח: $AF = BE$.
ב. הוכח: $DE + DF = BC$.



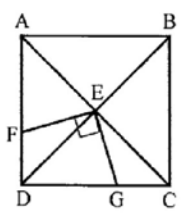
12. המרובעים ABCD ו- BEFG
הם ריבועים.
א. הוכח: $AG = CE$.
ב. הוכח: $AG \perp CE$.



13. המרובע ABCD הוא מקבילית.
על הצלעות AD ו- DC בנו
ריבועים ADKL ו- DEFC.
א. הוכח: $BF = BL$.
ב. הוכח: $BF \perp BL$.

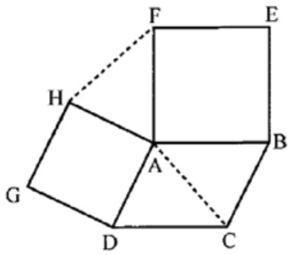


14. אלכסוני הריבוע ABCD נפגשים בנקודה E.
הנקודות F ו- G נמצאות על הצלעות
AD ו- DC בהתאמה. נתון: $EF \perp EG$.
א. הוכח: $EF = EG$.
ב. נתון: $\sphericalangle EGC = 3.5 \sphericalangle GEC$.
חשב את זוויותיו של המשולש DFE.

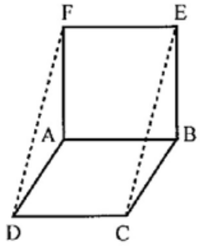


תשובה: ב. 45°, 105°, 30°.

15. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
על הצלעות AB ו- AD בונים
ריבועים $ABEF$ ו- $ADGH$.
הוכח: $\Delta FAH \cong \Delta ABC$.

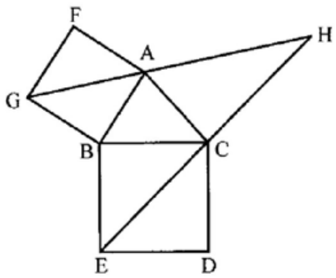


16. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
המרובע $ABEF$ הוא ריבוע.
א. הוכח: המרובע $DCEF$ הוא מקבילית.
ב. הוכח: $\Delta ADF \cong \Delta BCE$.



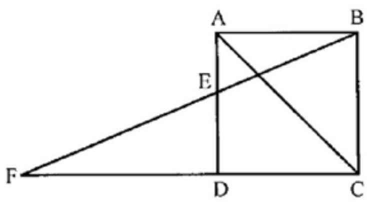
17. על הצלעות AB ו- BC של משולש ABC
בנו ריבועים $ABGF$ ו- $BCDE$.
המשכי הקטעים EC ו- GA
נפגשים בנקודה H .
נתון: $\sphericalangle ABC = 58^\circ$. חשב את הזווית H .

תשובה: 32° .

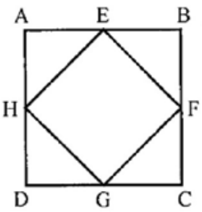


18. בריבוע $ABCD$ הנקודה E נמצאת
על הצלע AD . המשכי הקטעים
BE ו- CD נפגשים בנקודה F .
נתון: $AC = DF$.
חשב את הזווית BFC .

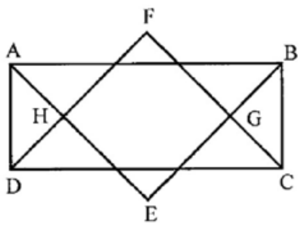
תשובה: 22.5° .



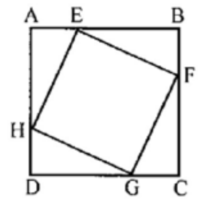
19. המרובע $ABCD$ הוא ריבוע.
הנקודות E , F , G ו- H הן אמצעי
הצלעות AB , BC , CD ו- AD בהתאמה.
א. הוכח: המרובע $EFGH$ הוא ריבוע.
ב. הוכח: $BG = DF$.



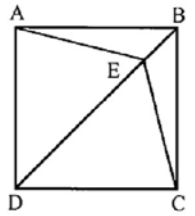
20. המרובע $ABCD$ הוא מלבן.
הקטעים AE , BE , CF ו- DF
חוצים את זוויותיו של המלבן $ABCD$.
הוכח: המרובע $EGFH$ הוא ריבוע.



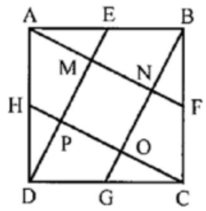
★ 21. המרובע ABCD הוא ריבוע.
נתון: $BE = CF = DG = AH$.
הוכח: מפגש האלכסונים של הריבוע ABCD מתלכד עם מפגש האלכסונים של המרובע EFGH .



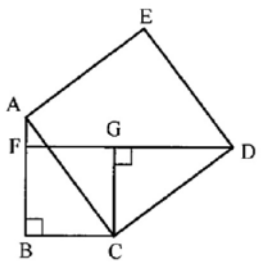
★ 22. הנקודה E נמצאת על האלכסון BD של מלבן ABCD .
נתון: $AE = CE$, $BE < DE$.
הוכח: המלבן ABCD הוא ריבוע.



23. המרובע ABCD הוא ריבוע.
E , F , G ו- H הן אמצעי הצלעות AB , BC , CD ו- DA .
הוכח: המרובע MNOP הוא ריבוע.

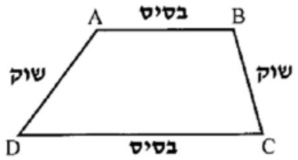


★ 24. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).
על היתר AC בנו ריבוע ACDE .
נתון: $DF \parallel BC$, $CG \perp DF$.
הוכח: המרובע BCGF הוא ריבוע.



טרפז

מרובע שיש בו זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות וזוג אחד של צלעות נגדיות שאינן מקבילות, נקרא טרפז.



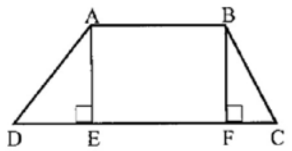
שתי הצלעות הנגדיות המקבילות (AB ו- DC) נקראות בסיסי הטרפז.
שתי הצלעות הנגדיות שאינן מקבילות (AD ו- BC) נקראות שוקי הטרפז.

הערות:

א. סכום הזוויות שליד כל שוק בטרפז שווה ל- 180°,
כלומר $\measuredangle A+\measuredangle D=180^\circ$, $\measuredangle B+\measuredangle C=180^\circ$
(לפי המשפט: זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים משלימות זו את זו ל- 180°).

ב. בסיסי הטרפז שונים באורכם.

ג. גובה הטרפז הוא קטע המחבר את שני בסיסי הטרפז ומאונך להם.
למשל, בציור שמשמאל, הקטעים AE ו- BF הם גבהים בטרפז.
שים לב: בין שני הגבהים של הטרפז לבין בסיסיו נוצר מלבן ABFE.

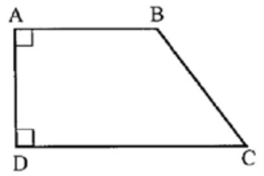


טרפז ישר-זווית

טרפז שבו זווית אחת היא זווית ישרה נקרא טרפז ישר-זווית.

הערות:

1. מכיוון שבסיסי הטרפז מקבילים זה לזה, הרי נקבל שבטרפז ישר זווית שתי הזוויות שליד השוק הקצרה הן זוויות ישרות ($\measuredangle A=\measuredangle D=90^\circ$).
2. השוק הקצרה בטרפז (השוק AD) שווה לגובה הטרפז.

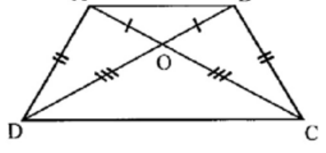


טרפז שווה-שוקיים

טרפז שבו השוקיים שוות זו לזו נקרא טרפז שווה שוקיים.

תכונות טרפז שווה-שוקיים:

1. הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו ($\measuredangle BAD=\measuredangle ABC$, $\measuredangle ADC=\measuredangle BCD$).
2. האלכסונים שווים זה לזה ($AC=BD$).
3. האלכסונים חותכים זה את זה, כך שקטעיהם היוצאים מאותו בסיס שווים זה לזה ($CO=DO$, $AO=BO$).



הוכחת טרפז

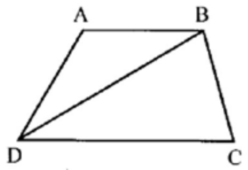
כדי להוכיח שמרובע הוא טרפז נפעל באחת הדרכים הבאות:
א. נוכיח שזוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו,
וזוג שני של צלעות נגדיות אינן מקבילות זו לזו.
דרך הוכחה זו מתבססת על הגדרת הטרפז.
ב. נוכיח שזוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו,
אך אינן שוות זו לזו.

כדי להוכיח שמרובע הוא טרפז ישר-זווית נוכיח שהמרובע הוא טרפז ובנוסף נוכיח שיש בטרפז זווית ישרה.

כדי להוכיח שמרובע הוא טרפז שווה-שוקיים נפעל באחת הדרכים הבאות:
א. נוכיח שהמרובע הוא טרפז, ובנוסף נוכיח ששוקי הטרפז שוות זו לזו.
דרך הוכחה זו מתבססת על ההגדרה של טרפז שווה-שוקיים.
ב. נוכיח שהמרובע הוא טרפז, ובנוסף נוכיח שזוויות הבסיס של הטרפז שוות זו לזו. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט: **טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה-שוקיים.**
ג. נוכיח שהמרובע הוא טרפז, ובנוסף נוכיח שאלכסוני הטרפז שווים זה לזה. דרך הוכחה זו מתבססת על המשפט: **טרפז שהאלכסונים בו שווים זה לזה הוא טרפז שווה-שוקיים.**

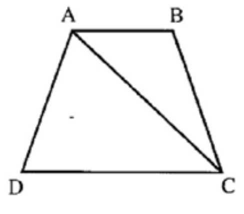
תרגילים

1. המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
נתון: $\sphericalangle ADB = 40^\circ$, $\sphericalangle DAB = 104^\circ$, $DB = DC$.
א. חשב את הזווית BDC .
ב. הוכח: $\sphericalangle DBC = 2 \cdot \sphericalangle ABD$.



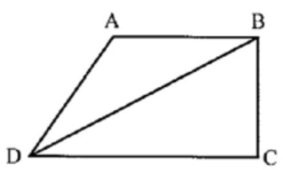
תשובה: א. 36° .

2. המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים $(AB \parallel DC\ ,\ AD = BC)$.
נתון: $\sphericalangle ADC = 66^\circ$, $\sphericalangle DAC = 72^\circ$.
חשב את זוויותיו של המשולש ABC .



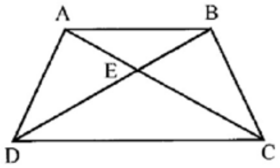
תשובה: 42° , 114° , 24° .

3. המרובע ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(AB \parallel CD\ ,\ BC \perp DC)$.
נתון: $AB = AD$, $\sphericalangle ADC = 68^\circ$.
חשב את הזווית DBC .



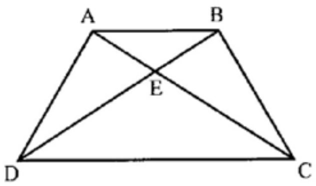
תשובה: 56° .

.4 המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
. $(AD = BC \ , AB \parallel CD)$
נתון: $\sphericalangle AEB = 114^\circ$, $\sphericalangle ABC = 122^\circ$.
א. חשב את הזווית BDC .
ב. חשב את הזווית ADE .



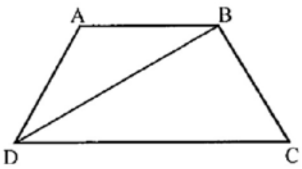
תשובה: א. 33° . ב. 25° .

.5 המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
$(AB \parallel DC)$. נתון: $\sphericalangle DAC = \alpha$, $BC = CE$.
א. הבע באמצעות α את הזווית EDC .
ב. הבע באמצעות α את הזווית ABC .



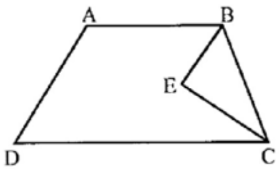
תשובה: א. $\frac{1}{2}\alpha$. ב. $1\frac{1}{2}\alpha$.

.6 המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
$(AD = BC \ , AB \parallel DC)$
נתון: $AB = AD$, $BD = DC$.
חשב את הזווית ABD .

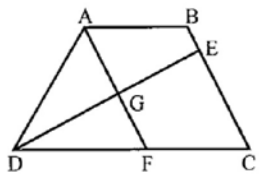


תשובה: 36° .

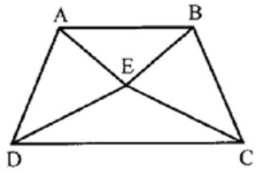
.7 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
BE ו- CE הם חוצי הזווית
של זוויות הטרפז.
הוכח: $BE \perp CE$.



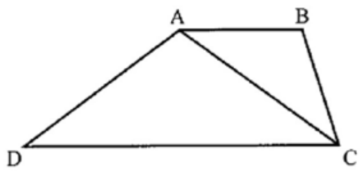
.8 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
DE חוצה את הזווית ADC
ו- AF חוצה את הזווית BAD .
א. הוכח: DG מאונך ל- AF .
ב. הוכח: DG חוצה את AF .



.9 המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
$(AB \parallel DC)$. E היא נקודה בתוך הטרפז.
נתון: $DE = CE$.
הוכח: $AE = BE$.

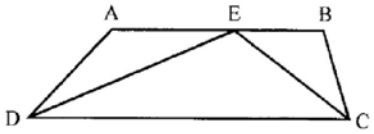


.10 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
נתון: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD$.
א. הוכח: $AD = AC$.
ב. האם המשולשים ABC
ו- DAC חופפים זה לזה?



תשובה: ב. לא.

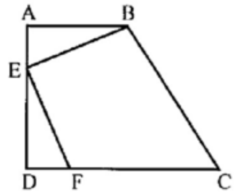
11. המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
הנקודה E נמצאת על הבסיס AB
כך ש- DE חוצה את הזווית ADC
ו- CE חוצה את הזווית BCD.
הוכח: $AB = AD + BC$.



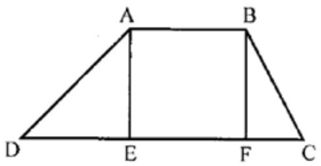
12. המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקיים $(AB \parallel DC)$. היקף המשולש BDC גדול ב- 4 ס"מ מהיקף המשולש ABC. נתון: $AB + DC =$ 16 ס"מ.
חשב את אורכי הבסיסים AB ו- DC.

תשובה: 6 ס"מ, 10 ס"מ.

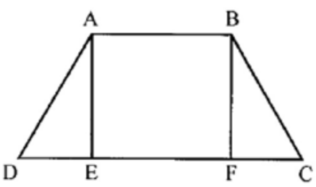
13. המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית $(AD \perp DC\ ,\ AB \parallel DC)$.
הנקודה E נמצאת על השוק AD.
נתון: $BE = EF\ ,\ AB = DE$.
הוכח: $BE \perp EF$.



14. המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
AE ו- BF הם גבהים בטרפז.
הוכח: המרובע $ABFE$
הוא מלבן.



15. AE ו- BF הם גבהים בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AD = BC\ ,\ AB \parallel DC)$.
א. הוכח: $DE = CF$.
ב. נתון: $AB =$ 10 ס"מ, $DC =$ 19 ס"מ, $\sphericalangle C = 60^\circ$. חשב את היקף הטרפז.

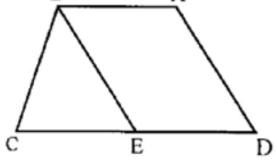


תשובה: ב. 47 ס"מ.

16. בטרפז ישר-זווית, השוק הארוכה היא 8 ס"מ והזווית החדה היא בת 30°.
חשב את השוק הקצרה בטרפז.

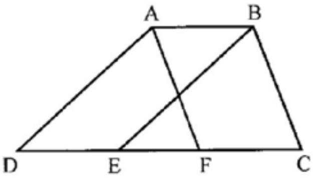
תשובה: 4 ס"מ.

17. המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
א. נתון: $BE \parallel AD$. הוכח: $AB = DE$.
ב. נתון: $BC =$ 7 ס"מ, $DC =$ 11 ס"מ,
$BE =$ 8 ס"מ, $CE =$ 5 ס"מ.
חשב את היקף הטרפז.

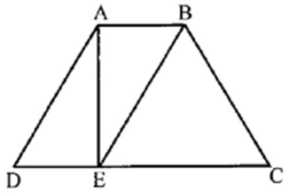


תשובה: ב. 32 ס"מ.

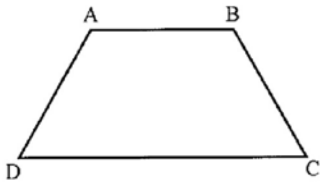
18. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).
הנקודות E ו- F נמצאות על הבסיס DC.
נתון: $AF \parallel BC$, $BE \parallel AD$.
א. הוכח: $DE = CF$.
ב. נתון: $AD > BC$. הוכח: $\sphericalangle C > \sphericalangle D$.



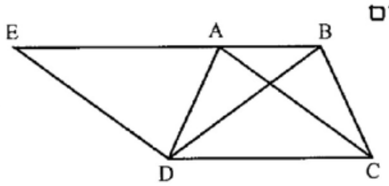
19. המרובע ABCD הוא טרפז שבסיסו DC
גדול פי 3 מבסיסו AB.
AE הוא גובה בטרפז.
נתון: $AD \parallel BE$. הוכח: הטרפז ABCD
הוא שווה-שוקיים.



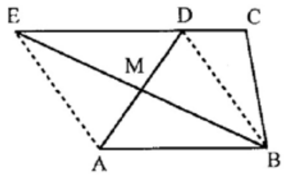
20. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).
נתון: $AD = AB = BC = \frac{1}{2}DC$.
א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.
ב. הוכח: $\sphericalangle DCA = 30^\circ$.
ג. הוכח: $AC \perp AD$.



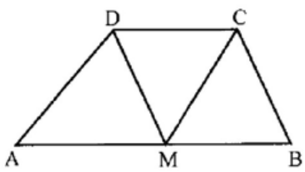
21. המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
($AD = BC$, $AB \parallel DC$).
E היא נקודה על המשך הבסיס AB.
נתון: $AE = DC$.
הוכח: $DB = DE$.



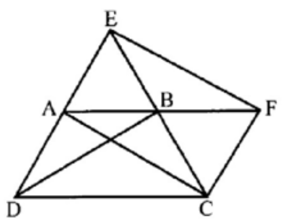
22. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
הנקודה E נמצאת על המשך הבסיס CD.
הקטע BE חותך את השוק AD
בנקודה M, כך ש- $AM = MD$.
הוכח: המרובע ABDE הוא מקבילית.



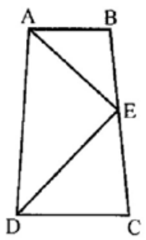
23. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
נתון: $BC = DC$.
CM חוצה את הזווית BCD.
א. הוכח: $BM = DM$.
ב. הוכח: $BD \perp CM$.



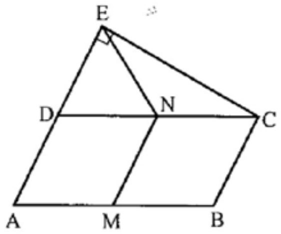
24. בתוך משולש שווה-צלעות EDC חסום
טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel DC$).
הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AB.
נתון: $BC = CF$.
א. הוכח: $\Delta ECF \cong \Delta DCB$.
ב. הוכח: $AC = EF$.



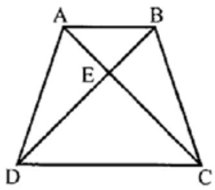
.25 המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$).
הנקודה E נמצאת על השוק BC
כך שמתקיים $AB = BE$, $DC = CE$.
א. הוכח: $AE \perp DE$.
ב. נקודה F נמצאת באמצע השוק AD .
הוכח: $DF = EF$.



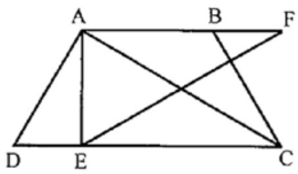
.26 הצלע AB במקבילית ABCD גדולה
פי שניים מהצלע AD . CE הוא גובה
לצלע AD . הנקודות N ו- M הן אמצעי
הצלעות DC ו- AB . הוכח:
המרובע AMNE הוא טרפז שווה-שוקיים
שבו אורך השוק שווה לאורך הבסיס הקטן.



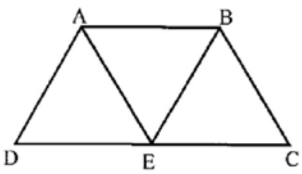
.27 המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
($AB \parallel DC$) שאלכסוניו נחתכים בנקודה E
ומאונכים זה לזה.
הוכח: גובה הטרפז שווה למחצית סכום
בסיסי הטרפז.



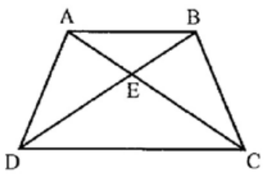
.28 AE הוא גובה בטרפז שווה-שוקיים ABCD
($AB \parallel DC$). F היא נקודה על המשך
הבסיס AB . נתון: $BF = DE$.
הוכח: $AC = EF$.



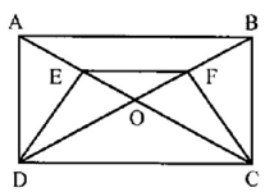
.29 הנקודה E נמצאת על הבסיס DC
של טרפז ABCD ($AB \parallel DC$).
נתון: $DE = AE = BE = CE$.
הוכח שהטרפז הוא שווה שוקיים.



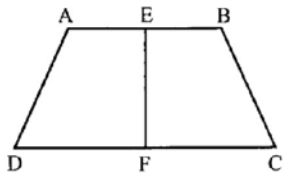
.30 בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) האלכסונים
AC ו- BD נחתכים בנקודה E וחוצים
את הזוויות BCD ו- ADC , בהתאמה.
א. הוכח שהטרפז הוא שווה-שוקיים.
ב. הוכח שמרחק הנקודה E מהשוק BC
שווה למרחקה מהשוק AD .



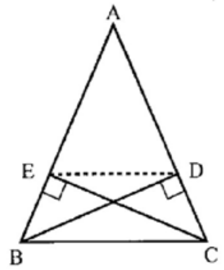
.31 במלבן ABCD האלכסונים AC ו- BD
נפגשים בנקודה O . הנקודות E ו- F
נמצאות על הקטעים OA ו- OB
בהתאמה כך ש- $AE = BF$.
הוכח: המרובע DCFE הוא טרפז
שווה-שוקיים.



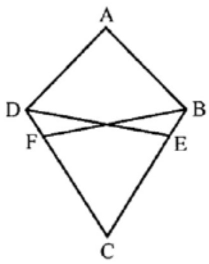
32. במרובע ABCD הנקודות E ו- F
הן אמצעי הצלעות AB ו- DC בהתאמה.
נתון: $EF \perp AB$, $EF \perp DC$, $AB < DC$.
הוכח: המרובע ABCD הוא
טרפז שווה-שוקיים.



33. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD ו- CE הם גבהים לשוקיים.
הוכח: המרובע BCDE
הוא טרפז שווה-שוקיים.



34. המרובע ABCD הוא דלתון $(AB = AD \ , BC = DC)$.
DE חוצה את הזווית ADC
ו- BF חוצה את הזווית ABC .
הוכח: המרובע BDFE
הוא טרפז שווה-שוקיים.



35. הוכח את המשפט: **בטרפז שווה-שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.**

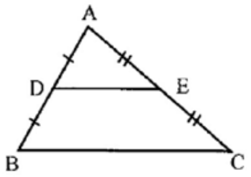
36. הוכח את המשפט: **בטרפז שווה-שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.**

37. הוכח את המשפט: **אם בטרפז, הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו, אז הטרפז הוא שווה-שוקיים.**

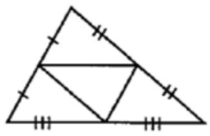
38. הוכח את המשפט: **אם האלכסונים בטרפז שווים זה לזה, אז הטרפז הוא שווה-שוקיים.**

קטע אמצעים במשולש

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

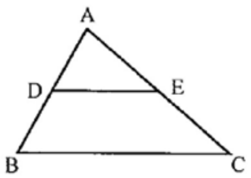


אם במשולש ABC, הנקודות D ו- E
הן אמצעי הצלעות AB ו- AC בהתאמה,
אז DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.



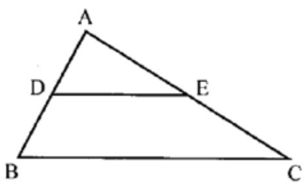
שים לב!
בכל משולש יש שלושה
קטעי אמצעים.

משפט: קטע אמצעים במשולש המחבר את האמצעים של שתי צלעות
במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.



אם DE הוא קטע אמצעים במשולש,
המחבר את אמצעי הצלעות AB ו- AC,
אזי מתקיים:
(1) $DE \parallel BC$. (2) $DE = \frac{1}{2}BC$.

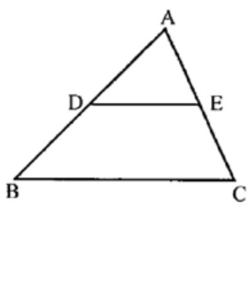
תרגילים



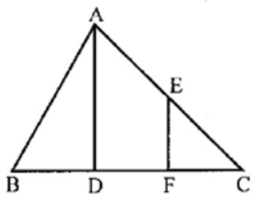
.1 DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
נתון: BC = 12 ס״מ, $\sphericalangle ADE = 62^\circ$.
א. מהו אורך הקטע DE?
ב. מהו גודל הזווית ABC?

תשובה: א. 6 ס״מ. ב. 62°.

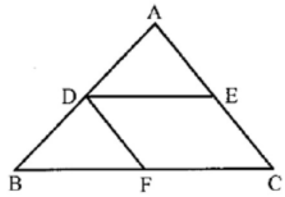
.2 הנקודות D ו- E הן בהתאמה אמצעי הצלעות
AB ו- AC של משולש ABC.
א. נתון: BC + DE = 12 ס״מ.
חשב את אורך הקטע DE.
ב. נתון: $\sphericalangle BDE = 3 \cdot \sphericalangle DBC$.
חשב את הזווית DBC.



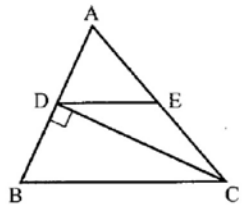
תשובה: א. 4 ס״מ. ב. 45°.



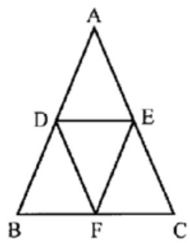
.3 AD הוא גובה לצלע BC במשולש ABC .
E ו- F הן אמצעי הקטעים AC
ו- DC בהתאמה.
הוכח: $EF \perp DC$.



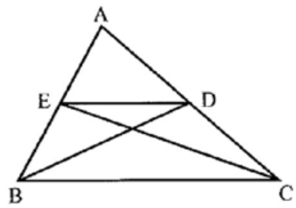
.4 במשולש ABC הנקודות D , E ו- F הן
בהתאמה אמצעי הצלעות AB , AC ו- BC .
א. הוכח: $\Delta ADE \cong \Delta DBF$.
ב. הוכח: המרובע DECF הוא מקבילית.



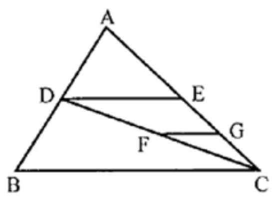
.5 DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC .
נתון: $\sphericalangle BDC = 90^\circ$.
הוכח: $AC = BC$.



.6 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
הנקודות D , E ו- F הן אמצעי
הצלעות AB , AC ו- BC בהתאמה.
הוכח: המרובע ADFE הוא מעוין.



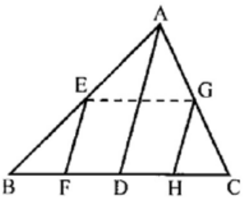
.7 במשולש ABC , BD הוא תיכון לצלע AC
ו- CE הוא תיכון לצלע AB .
הוכח: $DE \parallel BC$.



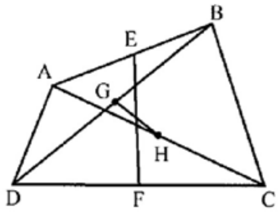
.8 DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC .
GF הוא קטע אמצעים במשולש DEC .
א. נתון: $BC = 12$ ס״מ .
חשב את אורך הקטע GF .
ב. הוכח: $AC = 4GE$.

תשובה: א. 3 ס״מ.

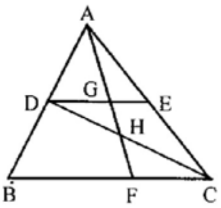
9. הנקודה D נמצאת על הצלע BC במשולש ABC.
EF הוא קטע אמצעים במשולש ABD.
GH הוא קטע אמצעים במשולש ACD.
א. הוכח: המרובע EFHG הוא מקבילית.
ב. הוכח: $EG=\frac{1}{2}BC$.



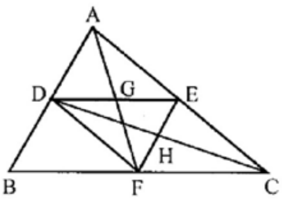
10. במרובע ABCD הנקודות E ו- F
הן אמצעי הצלעות AB ו- CD,
בהתאמה. הנקודות G ו- H
הן אמצעי האלכסונים BD ו- AC,
בהתאמה. הוכח: $GE=FH$.



11. DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
F היא נקודה על הצלע BC.
AF ו- DE נחתכים בנקודה G.
נתון: $BF=2CF$. הוכח: $CH=DH$.

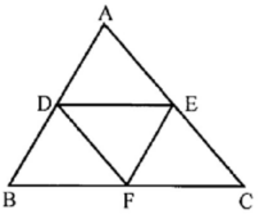


12. במשולש ABC, הנקודות D, E ו- F הן
בהתאמה אמצעי הצלעות AB, AC ו- BC.
א. הוכח: המרובעים ADFE ו- DECF
הם מקביליות.
ב. הוכח: $AC=4GH$.



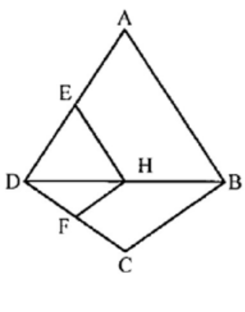
13. הנקודות D, E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AB, AC ו- BC של משולש ABC.
נתון כי היקף המשולש DEF הוא 12 ס"מ.
מהו היקף המשולש ABC?

תשובה: 24 ס"מ.



14. המרובע ABCD הוא דלתון ($AB=AD$, $CB=CD$).
הנקודות E, H ו- F הן אמצעי הקטעים
AD, BD ו- DC בהתאמה.
א. הוכח: המרובע EHFD הוא דלתון.
ב. נתון כי היקף הדלתון EHFD הוא 12 ס"מ.
מהו היקף הדלתון ABCD?

תשובה: ב. 24 ס"מ.

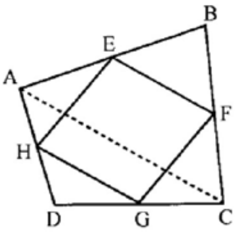


.15 במרובע $ABCD$, הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו- AD בהתאמה.

א. הוכח: המרובע $EFGH$ הוא מקבילית.

ב. נתון: $AC+BD=$ 12 ס"מ.

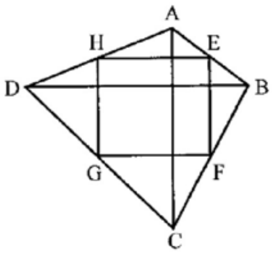
חשב את היקף המקבילית $EFGH$.



תשובה: ב. 12 ס"מ.

.16 במרובע $ABCD$, האלכסונים AC ו- BD מאונכים זה לזה. הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו- AD בהתאמה.

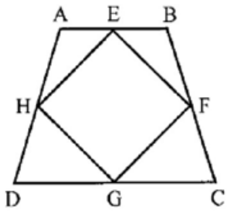
הוכח: המרובע $EFGH$ הוא מלבן.



.17 ★ המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$. הנקודות E, F, G ו- H הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD ו- AD בהתאמה כך שהמרובע $EFGH$ הוא ריבוע.

א. הוכח: $ABCD$ טרפז שווה-שוקיים.

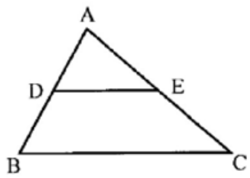
ב. הוכח: $AC \perp BD$.



הוכחת קטע אמצעים

נתון משולש ABC, והנקודות D ו- E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו- AC.

כדי להוכיח ש- DE הוא קטע אמצעים במשולש נסתמך על אחד מהמשפטים הבאים:



משפט: קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע אחרת, הוא קטע אמצעים במשולש.

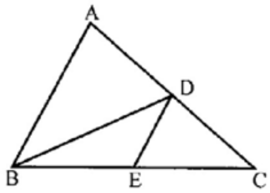
אם במשולש ABC נתון: $AD=DB$, $DE \parallel BC$, אזי DE הוא קטע אמצעים במשולש (מכיוון ש- DE הוא קטע אמצעים במשולש, מתקיים גם $AE=EC$, $DE=\frac{1}{2}BC$).

משפט: קטע המחבר נקודות על שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

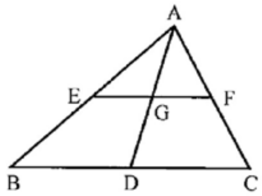
אם במשולש ABC נתון: $DE \parallel BC$, $DE=\frac{1}{2}BC$, אזי DE הוא קטע אמצעים במשולש (מכיוון ש- DE הוא קטע אמצעים מתקיים גם $AD=DB$, $AE=EC$).

הערה: אם קטע מחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, אז על פי הגדרה הוא קטע אמצעים במשולש.

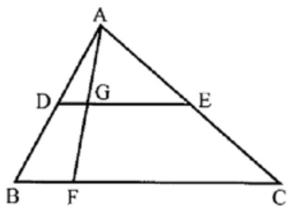
.18 BD הוא תיכון לצלע AC במשולש ABC .
E היא נקודה על הצלע BC .
נתון: $DE \parallel AB$.
הוכח: $BE = EC$.



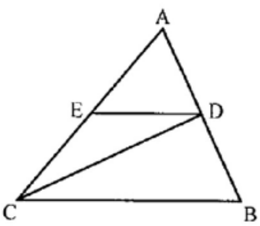
.19 EF הוא קטע אמצעים במשולש ABC .
D היא נקודה על הצלע BC .
AD ו- EF נחתכים בנקודה G .
הוכח: אם AD הוא תיכון במשולש ABC ,
אז AG הוא תיכון במשולש AEF .



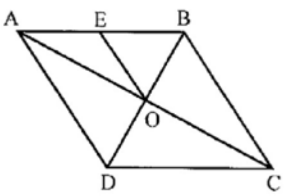
.20 DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC .
הנקודה F נמצאת על הצלע BC .
הקטע AF חותך את DE בנקודה G .
נתון: $GE = 3 \cdot DG$. הוכח: $BC = 4 \cdot BF$.



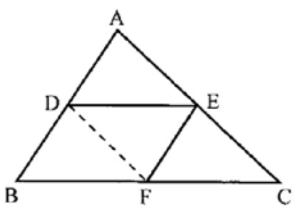
.21 הנקודה D היא אמצע הצלע AB במשולש ABC .
הקטע DC חוצה את הזווית ACB .
הנקודה E נמצאת על הצלע AC
כך שמתקיים $DE = CE$.
הוכח: E – אמצע הקטע AC .



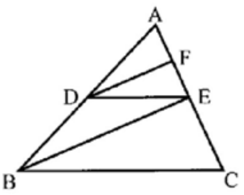
.22 המרובע $ABCD$ הוא מעוין שאלכסוניו
נפגשים בנקודה O .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB .
נתון: $OE \parallel BC$.
הוכח: $OE = \frac{1}{2} DC$.



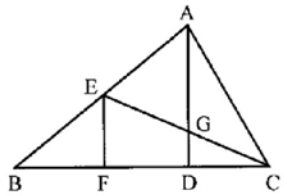
.23 הנקודה D היא אמצע הצלע AB
של משולש ABC . בתוך המשולש
חסומה מקבילית $DEFB$.
הוכח: המרובע $ADFE$ הוא מקבילית.



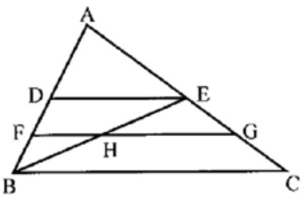
.24 DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC .
הנקודה F נמצאת על הקטע AE
כך שמתקיים $DF \parallel BE$.
הוכח: $FE = \frac{1}{2}EC$.



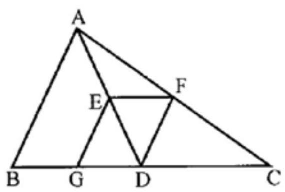
.25 AD הוא הגובה ל- BC במשולש ABC .
EF הוא הגובה ל- BC במשולש EBC .
נתון: $BF = FD = DC$.
הוכח: $AG = 3DG$.



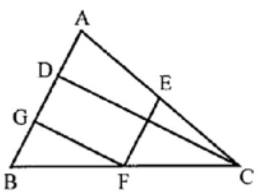
.26 במשולש ABC נתון: $AD = DB$,
$AE = EC$, $DF = BF$, $FG \parallel BC$.
הוכח: $GH = 2FH$.



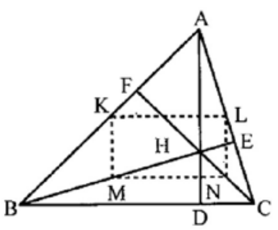
.27 AD הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC .
E – אמצע התיכון AD .
נתון: $DF \parallel AB$, $GE \parallel AB$.
הוכח: מרובע EFDG
הוא מקבילית.



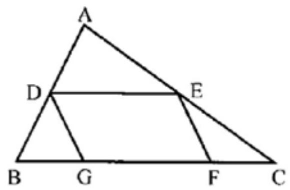
.28 CD הוא גובה במשולש ABC .
הנקודות E , F ו- G הן אמצעי הקטעים
AC , BC ו- BD , בהתאמה.
הוכח: $GF \perp EF$.



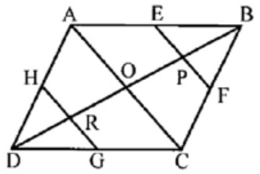
★ .29 גבהי המשולש ABC נפגשים בנקודה H .
נתון: $CL = LA$, $BK = KA$,
$BM = MH$, $CN = NH$.
הוכח: המרובע KLNM הוא מלבן.



30. במשולש ABC חסומה מקבילית $DEFG$. נתון: $AD = DB$.
הוכח: $BG + CF = GF$.

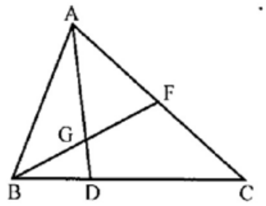


31. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
הנקודות E, F, G ו- H
הן בהתאמה אמצעי הצלעות
AB, BC, CD ו- AD.
הוכח: $OP = OR$.

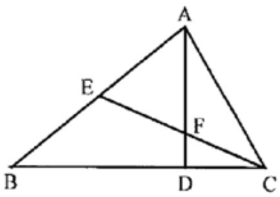


32. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC.
הנקודה F נמצאת על הצלע AC.
נתון: $DC = 2BD$, $AF = FC$, $DG =$ 4 ס"מ.
חשב את אורך הקטע AG.
הדרכה: דרך F העבר מקביל ל- AD.

תשובה: 12 ס"מ.

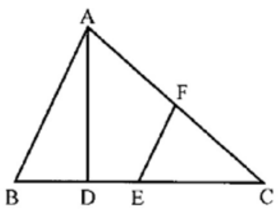


★ **33.** CE הוא תיכון לצלע AB במשולש ABC.
D היא נקודה על הצלע BC.
AD ו- CE נחתכים בנקודה F.
נתון: $AF = 3DF$.
הוכח: $BD = 2DC$.

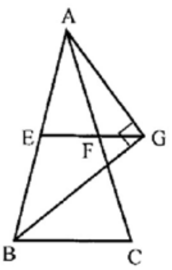


34. במשולש ABC, הנקודות D ו- E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו- AC.
נתון: $AD = BD$, $AE < CE$. הוכח: $\sphericalangle AED > \sphericalangle C$.

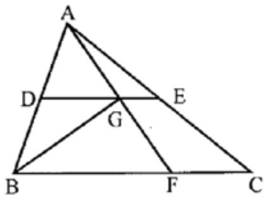
35. AD הוא הגובה לצלע BC של משולש ABC.
נתון: $\sphericalangle B = 60^\circ$, $AF = CF$,
$BE = CE$.
הוכח: $BD = EF$.



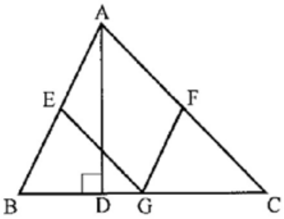
36. EF הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
הנקודה G נמצאת על המשך הקטע EF,
כך ש- $AG \perp BG$.
א. הוכח: $GE = BE$.
ב. הוכח: BG חוצה את הזווית ABC.



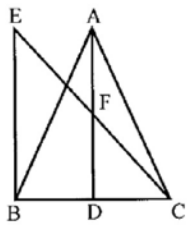
.37 DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
AF חותך את DE בנקודה G.
נתון: $BD = DG$.
הוכח: $AF \perp BG$.



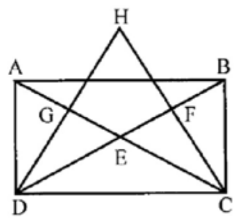
.38 AD הוא גובה לצלע BC במשולש ABC.
הנקודות E, F ו- G הן אמצעי
הצלעות AB, AC ו- BC בהתאמה.
הוכח: $GF + GE = DF + DE$.



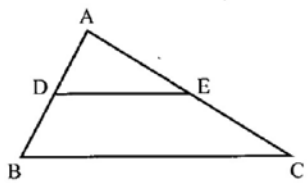
.39 ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$ שבו AD
הוא גובה לבסיס. מנקודה B מעלים אנך ל- BC.
מסמנים על אנך זה את הנקודה E,
כך שהקטעים EC ו- AD נחתכים בנקודה F,
הנמצאת בתוך המשולש ABC.
א. הוכח: $EF = FC$.
ב. נתון: $ED = AC$.
הוכח: המרובע $ACDE$ הוא מקבילית.



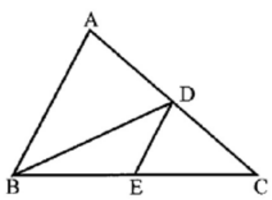
.40 אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים
בנקודה E. הנקודות G ו- F הן אמצעי
הקטעים AE ו- BE בהתאמה.
הוכח: המרובע $GEFH$ הוא דלתון.



.41 הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות
AB ו- AC של משולש ABC.
נתון: $DE \parallel BC$, 4 ס"מ $= DE$,
8 ס"מ $= BC$.
הוכח: $AD = BD$.



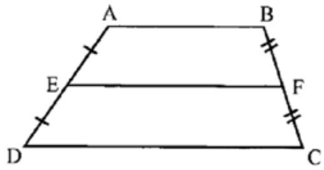
.42 הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות
AC ו- BC של משולש ABC.
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDC$, $AB = 2 \cdot DE$.
הוכח: BD הוא תיכון לצלע AC.



.43 הוכח את המשפט: **קטע אמצעים במשולש המחבר את האמצעים של שתי צלעות במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.**

קטע אמצעים בטרפז

קטע המחבר את אמצעי השוקיים של טרפז נקרא קטע אמצעים בטרפז.



אם המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$
ונתון: $AE = DE$, $BF = FC$,
אזי EF הוא קטע אמצעים בטרפז.

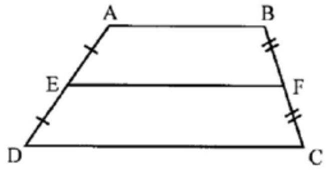
משפט: קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסי הטרפז ושווה למחצית סכומם.

אם המרובע $ABCD$ הוא טרפז $AB \parallel DC$ ו- EF הוא קטע אמצעים בטרפז, אזי מתקיים:

(1) $EF \parallel AB$, $EF \parallel DC$. **(2)** $EF = \frac{AB+DC}{2}$.

כאשר נתון קטע המחבר נקודות על שוקי הטרפז נוכל להוכיח שהוא קטע אמצעים בטרפז גם בהסתמך על המשפט הבא:

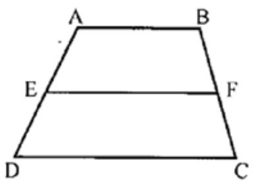
משפט: קטע היוצא מאמצע שוק אחת של הטרפז ומקביל לאחד מבסיסי הטרפז הוא קטע אמצעים בטרפז.



אם המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$
ונתון: $AE = DE$, $EF \parallel AB$,
אזי EF הוא קטע אמצעים בטרפז.

הערה: מהעובדה ש- EF הוא קטע אמצעים בטרפז, נובע ש- EF חוצה את השוק השנייה BC , כלומר $BF = FC$. כמו כן, נובע ש- EF שווה למחצית סכומם של בסיסי הטרפז, כלומר $EF = \frac{AB+DC}{2}$.

תרגילים



1. המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
EF הוא קטע אמצעים בטרפז.
נתון: $AB =$ 5 ס"מ , $DC =$ 9 ס"מ .
חשב את אורך הקטע EF .

תשובה: 7 ס"מ.

2. הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי השוקיים AD ו- BC בטרפז $ABCD$.
נתון: DC גדול ב- 4 ס"מ מ- AB , $EF =$ 9 ס"מ .
חשב את בסיסי הטרפז.

תשובה: 7 ס"מ, 11 ס"מ.

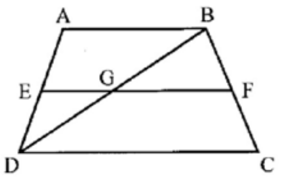
3. היקפו של טרפז שווה-שוקיים הוא 36 ס"מ. קטע האמצעים בטרפז גדול ב- 2 ס"מ משוק הטרפז. חשב את שוק הטרפז.

תשובה: 8 ס"מ.

.4 הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי השוקיים AD ו- BC של טרפז ABCD.
נתון: $\sphericalangle ABF = 2\cdot\sphericalangle BFE$, $\sphericalangle DEF = 3\cdot\sphericalangle EDC$. חשב את זוויותיו של הטרפז.

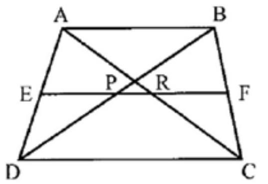
תשובה: 45° , 60° , 120° , 135°.

.5 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
BD ו- EF נחתכים בנקודה G.
נתון: GF = 7 ס"מ , EG = 4 ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז.



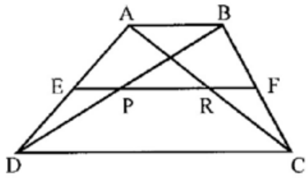
תשובה: AB = 8 ס"מ , DC = 14 ס"מ.

.6 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
EF חותך את האלכסונים AC ו- BD
בנקודות R ו- P בהתאמה.
נתון: AB = 12 ס"מ , DC = 18 ס"מ.
חשב את אורך הקטע PR.

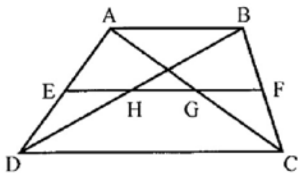


תשובה: 3 ס"מ.

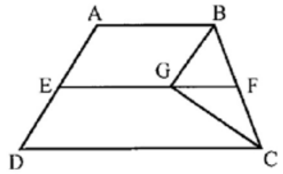
.7 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
EF חותך את האלכסונים AC ו- BD
בנקודות R ו- P בהתאמה.
א. הוכח: EP = RF.
ב. הוכח: $PR = \frac{DC - AB}{2}$.



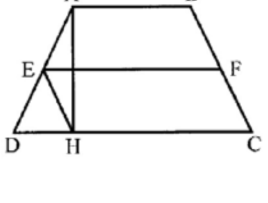
.8 ABCD הוא טרפז ($AB \parallel DC$) שבו DC = 2AB.
EF הוא קטע אמצעים בטרפז. AC ו- BD
חותכים את EF בנקודות G ו- H.
א. הוכח: EH = HG = GF.
ב. הוכח: $AH \parallel BF$.



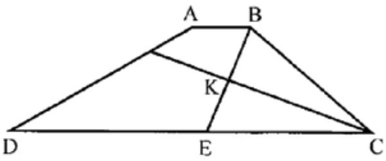
.9 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
G היא נקודה על הקטע EF.
הקטע BG חוצה את הזווית ABC.
הוכח: $BG \perp CG$.



.10 המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים
(AD = BC). EF הוא קטע אמצעים בטרפז.
AH הוא גובה בטרפז.
הוכח: המרובע EFCH הוא מקבילית.

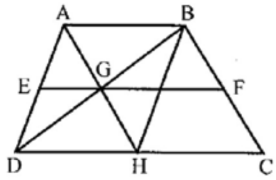


.11 בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$ חוצה-זווית ABC
חותך את חוצה-זווית BCD בנקודה K,
ואת הבסיס DC בנקודה E.
א. הוכח: $\sphericalangle BKC = 90^\circ$.
ב. דרך הנקודה K מעבירים מקביל
לבסיסי הטרפז. הוכח כי המקביל
הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
ג. נתון: 6 ס״מ $= BC$, 2 ס״מ $= AB$, 8 ס״מ $= DE$.
חשב את האורך של קטע האמצעים בטרפז ABCD. נמק.

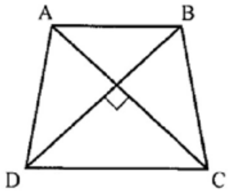


תשובה: ג. 8 ס״מ.

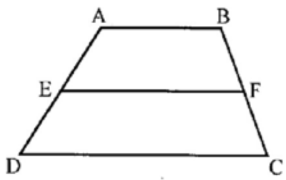
.12 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
BD ו- EF נחתכים בנקודה G.
המשך הקטע AG חותך
את הבסיס DC בנקודה H.
הוכח: $AD = BH$, $AD \parallel BH$.



.13 המרובע ABCD הוא טרפז שווה-שוקיים
$(AB \parallel DC)$. אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה.
הוכח שגובה הטרפז שווה לקטע
אמצעים של הטרפז.

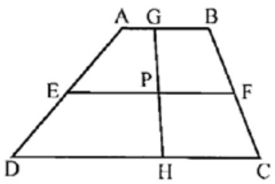


.14 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel DC)$.
הנקודות E ו- F נמצאות על השוקיים
AD ו- BC בהתאמה. נתון: $EF \parallel DC$,
$AE = ED$, 8 ס״מ $= AB$, 11 ס״מ $= EF$.
חשב את אורך הבסיס DC.

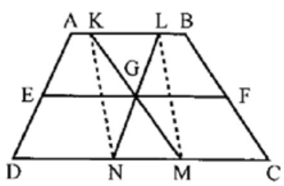


תשובה: 14 ס״מ.

.15 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
G ו- H הן נקודות על הבסיסים
AB ו- DC בהתאמה.
GH ו- EF נחתכים בנקודה P.
הוכח: $GP = PH$.



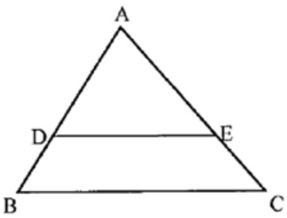
.16 EF הוא קטע אמצעים בטרפז ABCD.
הקטעים KM ו- LN נחתכים בנקודה G
הנמצאת על הקטע EF.
הוכח: המרובע KLMN הוא מקבילית.



17. בטרפז ABCD ‏$(AB \parallel DC)$, הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על השוקיים AD ו-BC. נתון: $AB = 7$ ס"מ, $DC = 13$ ס"מ, $EF = 10$ ס"מ, $EF \parallel DC$.
א. הוכח: E – אמצע השוק AD.
ב. הקטעים AC ו-EF נחתכים בנקודה G. חשב את אורך הקטע GF.

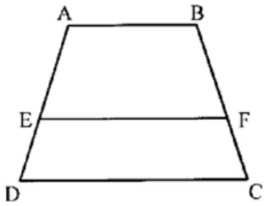
תשובה: **ב.** 3.5 ס"מ.

★18. במשולש ABC, הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC, בהתאמה.
נתון: $DE \parallel BC$, $DE = 6$ ס"מ, $AD = 2BD$.
חשב את אורך הצלע BC.



תשובה: 9 ס"מ.

★19. בטרפז ABCD ‏$(AB \parallel DC)$ הנקודות E ו-F נמצאות על השוקיים AD ו-BC בהתאמה, כך ש-$EF \parallel DC$.
נתון: $AB = 6$ ס"מ, $DC = 12$ ס"מ, $AE = 2DE$. חשב את אורך הקטע EF.



תשובה: 10 ס"מ.

20. הוכח את המשפט: **קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסי הטרפז ושווה למחצית סכומם.**

21. הוכח את המשפט: **קטע היוצא מאמצע שוק אחת של טרפז ומקביל לבסיסי הטרפז הוא קטע אמצעים בטרפז.**

שם התלמיד: ________________

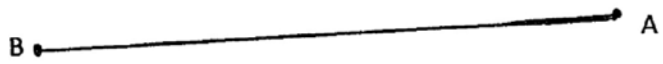
<u>דף עבודה בנושא בניות בגיאומטריה</u>

את המטלות יש לבצע על דף חלק בעזרת מחוגה וסרגל ללא מידות.

הראו את שלבי הבנייה בעזרת המחוגה.

תאריך הגשה: ________________________

1. העתיקו לדף חלק את הקטע הבא:



2. חצו את הקטע לשני קטעים שווים באורכם.
3.

(א) סרטטו קטע AB כרצונכם.

(ב) מצאו את נקודת האמצע של הקטע AB שסרטטתם.
סמנו אותה באות D.

(ג) העלו אנך לקטע AB מנקודה D.

(ד) בחרו נקודה כרצונכם על האנך. סמנו אותה באות C.

(ה) חברו את הנקודות A ו- C והנקודות B ו- C.

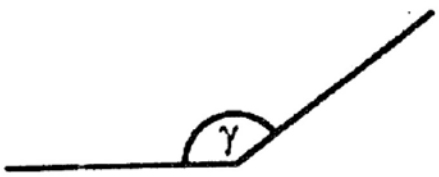
(ו) הוכיחו כי ΔABC שהתקבל הוא משולש שווה-שוקיים.

4.

לפניכם זווית γ.

(א) העתיקו אותה למחברתכם.

(ב) בנו את חוצה-זווית γ.



דף עזר בגיאומטריה

איך מוכיחים שמרובע הוא מקבילית?

מספיק להוכיח שהמרובע מקיים את אחד המשפטים הבאים:

1. שני זוגות זוויות נגדיות שוות זו לזו.
2. שני זוגות צלעות נגדיות שוות זו לזו.
3. שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.
4. זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות זו לזו ושוות זו לזו.
5. האלכסונים חוצים זה את זה.

איך מוכיחים שמרובע הוא מלבן?

מספיק להוכיח שהמרובע מקיים את אחד מהמשפטים הבאים:

1. מוכיחים שהמרובע הוא מקבילית (לפי אחד מהסעיפים למעלה), ואז מוכיחים שקיימת במקבילית זווית ישרה.
2. מוכיחים שהמרובע הוא מקבילית שאלכסוניה שווים זה לזה.
3. מוכיחים שיש במרובע 3 זוויות ישרות ואז הרביעית גם ישרה.

איך מוכיחים שהמרובע הוא מעוין?

מספיק להוכיח שהמרובע מקיים את אחד המשפטים הבאים:

1. מוכיחים שכל צלעות המרובע שוות זו לזו.
2. מוכיחים שהמרובע הוא מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות.
3. מוכיחים שהמרובע הוא מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית.
4. מוכיחים שהמרובע הוא מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה.

איך מוכיחים שהמרובע הוא ריבוע?

מספיק להוכיח שהמרובע מקיים את אחד המשפטים הבאים:

1. מוכיחים שהמרובע הוא מעוין בעל זווית ישרה.
2. מוכיחים שהמרובע הוא מלבן בעל שתי צלעות סמוכות שוות.
3. אם במלבן אחד האלכסונים חוצה זווית אז הוא ריבוע.
4. אם במלבן האלכסונים מאונכים זה לזה אז הוא ריבוע.
5. אם במעויין האלכסונים שווים זה לזה אז הוא ריבוע.
6. אם במרובע כל הצלעות וכל הזוויות שוות אז הוא ריבוע.
7. אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה, שווים זה לזה ואחד האלכסונים חוצה את הזווית אז הוא ריבוע.
8. אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה, שווים זה לזה ומאונכים זה לזה אז הוא ריבוע.

איך מוכיחים שמרובע הוא טרפז?

מספיק להוכיח שהמרובע מקיים את אחד המשפטים הבאים:

1. מוכיחים שיש במרובע זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות.

איך מוכיחים שמרובע הוא טרפז שווה שוקיים?

2. בהנחה שכבר הוכחנו שהמרובע הוא טרפז אז מספיק להוכיח את אחד המשפטים הבאים:. הצלעות הלא מקבילות של הטרפז שוות זו לזו.
3. הזוויות ליש הבסיס שוות זו לזו.
4. האלכסונים שווים זה לזה.